MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

MATEMÁTICA

Módulo 2

Unidades 11 e 12

Unidade 11

<pág. 5>

Conjuntos
Para início de conversa...

Na canção Oração ao tempo, o compositor e cantor baiano Caetano Veloso conversa com o tempo, negociando com ele melhores formas de aproveitamento do tempo e pedindo auxílio para não gastar tempo sem que este gasto retorne em benefícios, alegrias e prazeres. Você

conhece essa música? Não? Então aproveite: por ocasião dos seus 70 anos, comemorados em 2012, Caetano Veloso disponibilizou todas as suas canções em seu site oficial, http://www.caetanoveloso.com.br/discografia.php.

Ah, o tempo... Você tem a sensação de que os dias têm passado cada vez mais rápido? Os meses parecem quinzenas, as quinzenas parecem semanas, as semanas passam com uma velocidade assustadora! Hoje é sexta-feira e temos a sensação de que ontem foi... segunda-feira! O que estaria

acontecendo? Estariam os relógios realmente acelerando seus ponteiros?

Saiba Mais

Alguns cientistas estudam e debatem sobre esse tema... No link http://super.abril.com.br/cotidiano/tempo-cada-vez--mais-acelerado-445560.shtml, você vai encontrar alguns comentários muito interessantes sobre isso, se puder, acesse e leia, vale a pena!

****

Bem, provavelmente, esta sensação de aceleração

do tempo deve-se à grande quantidade de atribuições e encargos a que temos tido nos últimos tempos. Temos agora de encontrar tempo para gerenciar emprego, família, para retomar os estudos e, é claro, também para algum tipo de lazer. Antigamente, não era assim. Nossos avós dividiam-se unicamente entre um emprego – normalmente suficiente – e a família.

<pág. 6>

Para sobrevivermos no meio do corre-corre do

mundo moderno, em um mar de apetrechos tecnológicos irresistíveis, precisamos aprender a nos organizar, agrupando atividades que possam ser feitas mais ou menos ao mesmo tempo. Um dos segredos para conseguirmos isso, consiste na organização das tarefas, dividindo-as ao longo do nosso dia, por exemplo: tarefas de trabalho, tarefas domésticas, tarefas sociais e tarefas de estudo.


BANCO
BANCO

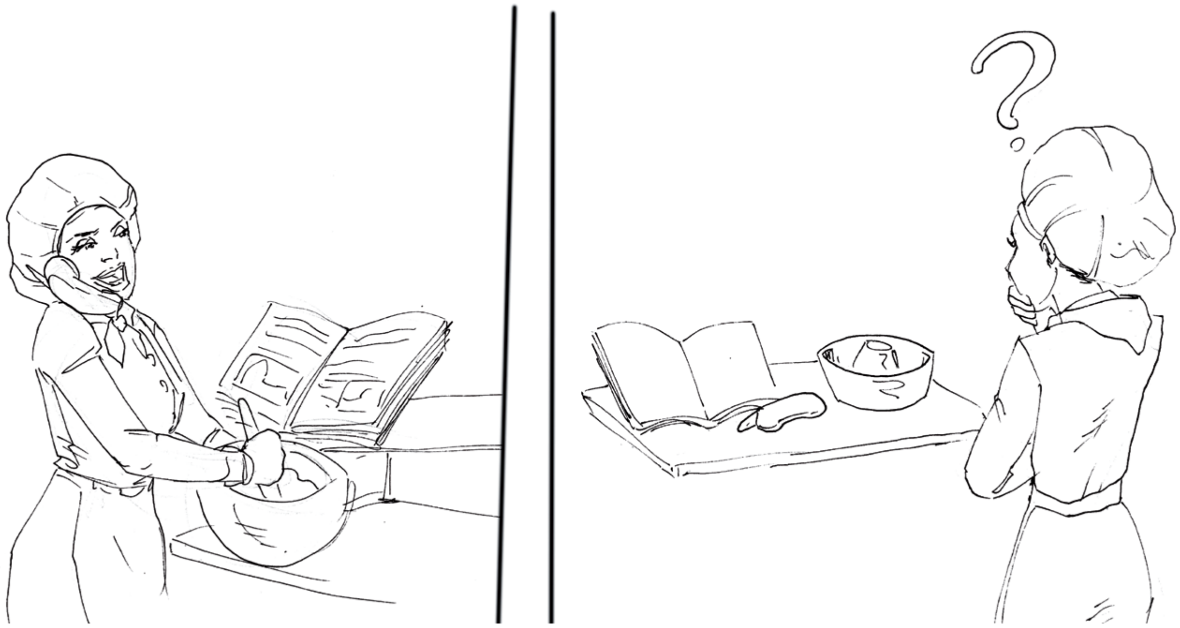


Figura 1: Representação de atividades cotidianas

Analise sua vida diária e observe que muitas atividades podem ser feitas juntas. Por exemplo. Vamos observar a seguinte lista de compras descrita abaixo:

Inicialmente é necessário produzir a lista de produtos, assim, ordenadamente, verificamos em casa quais produtos são necessários e

os ordenamos obedecendo uma sequência, por exemplo: carnes, cereais, frios, artigos de hortifruti, material de limpeza, material de higiene pessoal, etc.

<pág. 7>

Lista de compras

- **Refrigerante**
- **Detergente**
- **Sabão em pó**
- **Atum sólido**
- **Leite em caixa**
- **Inseticida em spray**
- **Óleo de soja**

- Creolina
- Leite em pó
- Leite de soja com fruta
- Sabão líquido
- Iogurte 1l

É fácil perceber que os supermercados disponibilizam os produtos dividindo-os por setor, ou seja, para efetuarmos a compra de maneira ordenada, basta buscar em cada setor o grupo de produtos de uma única vez, isto é, os elementos que são comuns a cada setor. Por exemplo, ao comprarmos iogurte iremos diretamente na sessão de laticínio. Ao

finalizarmos as compras, também podemos arrumar os produtos em sacolas de forma a facilitar a arrumação ao chegarmos em casa. Uma bolsa para os produtos de geladeira, outra para bebidas e assim por diante.

Assim como em nosso cotidiano, em Matemática, há muitas coisas para serem estudadas... Para facilitar esse estudo e para organizar os seus objetos, ela também é organizada dessa mesma forma: em categorias e buscando as relações entre elas. Nesta

aula, vamos estudar exatamente isso!

Objetivos de Aprendizagem

.Reconhecer conjuntos e elementos, e definir relações de pertinência e inclusão.

.Resolver problemas envolvendo propriedades e operações com conjuntos.

.Representar subconjuntos dos números reais e realizar operações com eles.

<pág. 9>

Seção 1

Conjuntos e elementos

Está ou não está? PERTENCE OU NÃO PERTENCE?

Figura 2: Situações onde se expressa a presença de conjunto

Alunos em uma sala de aula, as frutas em um cesto, livros em uma biblioteca... Podemos identificar nestas imagens situações onde elementos estão organizados em conjuntos:

os alunos são elementos do conjunto turma; as frutas são elementos do conjunto cesto; os livros são elementos do conjunto biblioteca.

Os elementos matemáticos (como números ou figuras) são agrupados, segundo características que eles têm de parecidos uns com os outros, formando também conjuntos.

Mas como podemos identificar esses conjuntos em nossas anotações? Faça isso em seu caderno! Como você organizou esses conjuntos?

Se conversar com os seus companheiros de estudo, você provavelmente vai perceber que cada um representou esses conjuntos de uma forma diferente. Para padronizar estes registros, existem algumas regras que seguimos. Veja!

<pág. 10>

Importante

Quando vamos dar nome a um conjunto em Matemática, usamos uma letra maiúscula do nosso alfabeto, pois dessa forma torna-se mais simples nos referirmos a ele. Também para representar elementos dos conjuntos, quando estes não são numéricos, utilizamos letras minúsculas do nosso alfabeto.

******

Agora pode ficar mais fácil. Podemos então, se retomarmos as imagens que iniciam esta seção, falar do conjunto T dos alunos da turma, do conjunto L dos livros de uma biblioteca e do conjunto F das frutas contidas no cesto.

Vamos nos concentrar no conjunto F. Que frutas você vê em F? Há bananas? E abacates? E uvas? Bem, pelo que visualizamos não há

abacates em F, mas banana e uva sim. Podemos dizer então que banana pertence ao conjunto F, assim como uva pertence ao conjunto F, mas por outro lado, abacate não pertence ao conjunto F. Na Matemática utilizamos uma linguagem própria para estas representações. Observe a seguir!

Importante

Na Matemática utilizamos o símbolo ∈ para indicar que um elemento está em um conjunto.Lemos como pertence. Se um elemento não está em um conjunto, então dizemos que ele não pertence ao conjunto e

representamos matematicamente esta ideia com o símbolo ∉.

****

Desta forma, representando a fruta banana pela letra b, podemos escrever que a banana pertence ao conjunto das frutas como b ∈ F, de mesma forma, representando a fruta abacate pela letra a, teremos a ∉ F.

Se chamarmos de B ao conjunto biblioteca, teremos cada livro como um elemento deste conjunto. Podemos chamar o livro de história de h, assim, h ∈ B.

Vamos aplicar essas ideias ao que conversamos anteriormente? Utilizando os símbolos ∈ e ∉, vamos relacionar os elementos a, b, u e h com os conjuntos F, B, T.

<pág. 11>

Atividade 1

Vamos reescrever o que dissemos acima, mas agora utilizando os símbolos ∈ e ∉ e a notação matemática de letras maiúsculas para conjuntos e minúsciulas para elementos.

a. a______F

b. u______T

c. h_______B

d. b_______F

e. u_______F

f. u _______B

******

Atividade 2

Agora vamos fazer o contrário. A partir da linguagem simbólica da matemática, você deve escrever a sentença na linguagem coloquial.

a. h $\in$ B

b. a $\notin$ T

c. u $\notin$ T

d. b $\in$ F

<pág. 12>

Imagine agora que três amigos desejam utilizar as frutas para fazer diferentes tipos de suco. Cada um prefere um sabor diferente e para isso, pode ser feita uma combinação de frutas. Por exemplo, Bianca quer um suco de laranja com morangos, já Guilherme prefere um suco de abacaxi, laranja e maçã; Melissa no entanto, prefere de laranja, morango e banana. É possível atender a todos os pedidos?

Obviamente a resposta é não. Bianca vai conseguir tomar o seu suco, pois as

frutas que ela deseja são elementos do conjunto F. Melissa também vai ter o seu desejo atendido, porque laranja e banana também são elementos de F. Entretanto, Guilherme terá de escolher outro sabor, visto que não há abacaxi na cesta!

Podemos pensar nos desejos dos amigos como conjuntos também. Se chamarmos de B o conjunto das frutas desejadas por Bianca seu suco, G o conjunto das frutas desejadas por Guilherme e M o de Melissa, então ficamos com B = {morango,

laranja}, G = {laranja, abacaxi, maça} e M = {banana, laranja, morango}. Como podemos observar, nem todos os elementos dos conjuntos de frutas utilizados para fazer os sucos serão elementos do conjunto frutas.

A seguir, veremos uma forma simples de escrevermos isso...

Importante

O símbolo matemático ⊂ é usado para indicar que TODOS os elementos de um conjunto também são elementos do outro conjunto. Lemos como está

contido. Se pelo menos um elemento do primeiro conjunto considerado não está no segundo conjunto, então dizemos que o primeiro conjunto não está contido no segundo conjunto, e representamos matematicamente esta ideia com o símbolo $\not\subset$.

****

Atividade 3

Vamos utilizar os símbolos $\subset$ e $\not\subset$ para dizer se um conjunto tem ou não tem todos os seus elementos pertencentes a outro conjunto.

a. B________F

b. M _______ F

c. G _______ F

d. B________M

e. G _______ M

f. B ________G

******

<pág. 13>

Importante

Uma parte ou um subconjunto de um conjunto dado, é outro conjunto que tem todos os seus elementos pertencentes ao primeiro conjunto. Isso significa que quando usamos o símbolos ⊂ para

associar dois conjuntos, estamos afirmando ao mesmo tempo que o primeiro conjunto é subconjunto (ou é uma parte) do segundo conjunto, pois tem todos os seus elementos pertencentes ao segundo.

******

Usando estas ideias com os sucos das meninas, podemos dizer que $B \subset F$ e $M \subset F$, mas $G \subset F$. Ou ainda, de outra forma, B e M são subconjuntos de F, mas G não é.

Atividade 4

Na estante de uma biblioteca se encontram livros de história, matemática, geografia, língua portuguesa, química e biologia. Os alunos formam grupos de estudos de acordo com a distribuição.

Grupo A estudará Química, Física e Biologia

Grupo B estudará Língua Portuguesa, Matemática, História

Grupo C estudará Geografia, Matemática

Sendo o conjunto dos livros da Estante da Biblioteca denominado por

U, verifique as afirmações a seguir colocando V para Verdadeiro ou F para Falso. Justifique cada decisão:

a. $A \not\subset U$ ( )

b. $B \subset U$ ( )

c. $C \subset B$ ( )

****

<pág. 14>

Atividade 5

Em uma lanchonete o painel demonstrativo apresenta 4 tipos de sanduiches, duas opções de bebida e duas de acompanhamento. Construa conjuntos relacionando

todos os tipos possíveis de lanches, levando em conta que cada escolha obrigatoriamente terá um sanduiche, uma bebida e uma opção de acompanhamento. Todos os lanches deverão ser formados pelos elementos contidos nas opções apresentadas no painel da lanchonete.
******

Atividade 6

Na sua sala de aula, forme dois conjuntos de alunos e depois compare suas respostas com os colegas. Algum conjunto

ficou igual?Algum dos seus conjuntos está contido em algum conjunto feito pelo seu colega?
****

Como escrever conjuntos?

Já conversamos sobre as ideias de conjuntos e sobre alguns símbolos que utilizamos para representar mais facilmente estas ideias. Muitas vezes, precisamos escrever um conjunto. È claro que podemos sempre usar os recursos utilizados até agora nesta aula,

entretanto, nem sempre é assim algo tão simples.

Utilizar figuras é um recurso muitas vezes interessante para visualizar, principalmente, as relações entre os conjuntos – que conjuntos estão inteiramente ou parcialmente dentro de outros. Para isto, utilizamos uma representação por diagrama.

<pág. 15>

Importante

Um diagrama representa um conjunto em Matemática, quando ele é uma região fechada simples, delimitada

por uma linha, em um plano considerado. Dentro dessa região estão os elementos do conjunto representado; fora dela, estão os elementos que não pertencem a este conjunto.

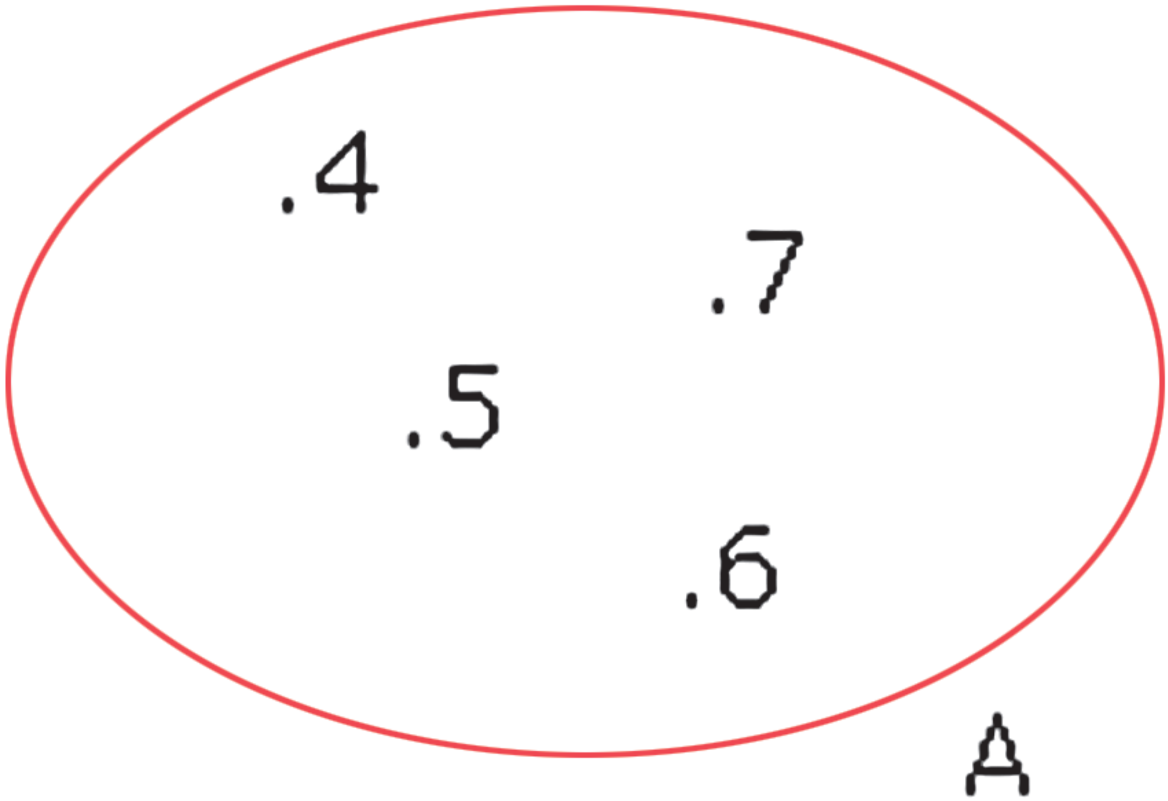
****

É comum haver situações em que a utilização de diagramas não seja a forma mais prática de representação. As relações entre conjuntos eventualmente tornam-se mais difíceis de serem representadas por desenhos.

Para auxiliar nessa tarefa, há outras duas

formas de representação de conjuntos, que utilizam o símbolo matemático, conhecido como chaves – { }. As chaves trazem entre si todos os elementos do conjunto que representam. Estes elementos podem vir descritos um a um (ou indicados) ou ainda podemos destacar uma propriedade que seja comum a todos os elementos que pertencem ao conjunto.

Pense no conjunto A dos números naturais maiores que 3 e menores que 8, podemos representar assim esse conjunto:



A = {4, 5, 6, 7}

A = {Números naturais entre 3 e 8}

Vamos ver outro exemplo?

Atividade 7

Vamos representar por chaves, descrevendo os elementos dos conjuntos?

a. Conjunto A das letras da palavra MATE

b. Conjunto B das letras da palavra CONJUNTO

c. Conjunto C dos números naturais menores que 10 e maiores que 1

d. Conjunto D dos números naturais maiores que 10

e. Conjunto E dos números negativos compreendidos entre 2 e 4

Quantos elementos possui cada um dos conjuntos que você escreveu na Atividade 6? Bem, o primeiro conjunto tem 4 elementos, que são as letras m, a, t, e. E o segundo conjunto, quantos elementos tem? Podem surgir dúvidas entre 8 ou 6 elementos... E sabe o que vai nos auxiliar nesta tarefa? A informação de que:

****

Importante

Não repetimos elementos iguais em um conjunto.

****

<pág. 17>

Ah, agora ficou fácil. Isso quer dizer que o conjunto B é formado pelos elementos c, o, n, j, u e t, ou seja, ele tem 6 elementos.

E o conjunto C, quantos elementos tem? Você saberia responder? Sem problemas, são os números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, ou seja, são 8 elementos. Entretanto, o conjunto D, quantos elementos tem? Sabemos que ele tem o 11, o 12, o 13, o 200, o 1000... Mas quantos elementos ele tem?

Ah, não foi possível contar, não é mesmo? E sabe por que não conseguimos contar quantos elementos existem no conjunto D? Porque ele é um conjunto que contém uma quantidade infinita de elementos. Os conjuntos que tem esta característica são chamados de conjuntos infinitos.

E o conjunto E, quantos elementos ele tem? Responder a essa pergunta significa pensar em quantos são os números negativos que existem entre 2 e 4. Mas... há números negativos entre 2 e 4? Não! Ora, então

esse conjunto não tem elementos! Esse conjunto é chamado de vazio!

Importante

Um conjunto é vazio, quando não possui elementos. Podemos representar o conjunto vazio pela simbologia { }. Isso mesmo, chaves sem elemento algum, ou ainda através do símbolo Ø.

Nunca escreva E={Ø}, esse conjunto não é vazio, pois é um conjunto que possui como único elemento um outro conjunto, que por sua vez é vazio.

****

Esse conceito (de conjunto infinito) é bastante difícil... Mas para nós, basta sabermos reconhecer quando o conjunto é infinito ou não. Quer ver um exemplo? Pense nos conjuntos M dos números naturais entre 2 e 10000 e o conjunto N dos números naturais maiores que 2. Vamos escrevê-los entre chaves.

M = {3, 4, 5, 6, 7, ..., 9998, 9999}

N = {3, 4, 5, 6, 7, ...}

Vamos pegar um subconjunto de M, por exemplo M1 = {4,5,6,7,...,9999}. Note que

se fizermos uma correspondência entre os elementos dos dois conjuntos, teremos M1 com um elemento a menos que M. Isto não acontece com N. Se tomarmos N1 = {4,5,6,7,...}, poderemos relacionar os elementos de ambos os conjuntos e teremos uma correspondência para todos os elementos. Isto caracteriza um conjunto infinito.

<pág. 18>

Saiba Mais

Quer saber mais sobre o infinito? Acesse o Youtube e

assista ao vídeo "Os Infinitos de Cantor", da série da Unicamp, intitulada Matemática Multimídia. Você poderá encontrá-lo, acessando a Internet com o link http://www.youtube.com/watch?v=f1Ak-6vMVpg em seu navegador. Assista, vale a pena!

****

Falamos bastante em quantidade de elementos de um conjunto. Como fazer esta representação. Bem, podemos utilizar duas formas para isto. Vamos utilizar exemplos da atividade 6.

Conjunto A das letras da palavra MATE. Este conjunto pode ser escrito como A = {m,a,t,e}, logo o número de elementos pode ser representado por #A=4 ou n(A) = 4

Conjunto B das letras da palavra CONJUNTO. Teremos B={c,o,n,j,u,t}, assim, #B=6 ou n(B) = 6

Conjunto E dos números negativos compreendidos entre 2 e 4, teremos #E = 0 ou n(E) = 0

No caso do conjunto ser infinito, não é possível definir sua cardinalidade, ou seja, o seu número de elementos.

Ainda sobre os conjuntos, é preciso destacar a ideia de subconjuntos de um conjunto.

Importante

O conjunto das partes de um conjunto dado é o conjunto formado por todos os possíveis subconjuntos do conjunto considerado.

****

Vamos tomar como exemplo o conjunto A da atividade 6. A={m,a,t,e}. A partir deste conjunto, podemos formar vários subconjuntos. Coloquemos em ordem:

Subconjunto com zero elementos: { }

Subconjuntos com 1 elemento: {m}, {a}, {t}, {e}

Subconjuntos com 2 elementos: (m,a}, {m,t}, {m,e}, {a,t}, {a,e}, {t,e}

Subconjuntos com 3 elementos: (m,a,t}, {m,a,e}, {m,t,e}, {a,t,e}

Subconjunto com 4 elementos: (m,a,t,e}

Se juntarmos todos estes subconjuntos, formaremos um conjunto denominado conjunto das partes de A.

<pág. 19>

Vamos fazer sua representação da seguinte forma:

P(A)={{ }, {m}, {a}, {t}, {e}, (m,a}, {m,t}, {m,e}, {a,t}, {a,e}, {t,e}, (m,a,t}, {m,a,e}, {m,t,e}, {a,t,e}, {m,a,t,e}}

O número de partes de um conjunto é dado por 2n, onde n é o número de elementos do conjunto.

Observe que nesse exemplo, o conjunto A tem 4 elementos, e o conjunto das partes de A possui 24 = 16 elementos, que são todos os

possíveis subconjuntos de A!

Importante

O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.Todo conjunto é subconjunto de si próprio.

****

Atividade 8

No conjunto M das letras da palavra PAI, qual o conjunto das partes de M? Relacione todos os subconjuntos.

****

Operações com Conjuntos

Você lembra da nossa lista de compras utilizada

inicialmente? Vamos usá-la como exemplo para darmos continuidade ao nosso estudo. Vamos aprender sobre as operações que podem ser realizadas entre conjuntos.

<pág. 20>

Quando arrumamos as compras na despensa é preciso organização. Não podemos guardar alimentos com produtos de limpeza, cada produto tem seu local certo para ser armazenado. É preciso então uma maneira que facilite o

trabalho, fica muito mais fácil encontrar as coisas, quando elas estão bem organizadas...

Pois é, nessa organização, podemos agrupar os itens conforme características que eles têm, seja quanto ao tipo de em-balagem, seja quanto ao

tipo de produto, contido nestas embalagens. Por exemplo, quanto ao tipo de embalagem, podemos estabelecer algumas categorias, como latas ou caixas; em relação aos tipos de produtos comprados, podemos organizar em alimentos ou limpeza.

Vamos lembrar os itens das últimas compras:

Lista de compras

- **Refrigerante**
- **Detergente**
- **Sabão em pó**
- **Atum sólido**
- **Leite em caixa**
- **Inseticida em spray**

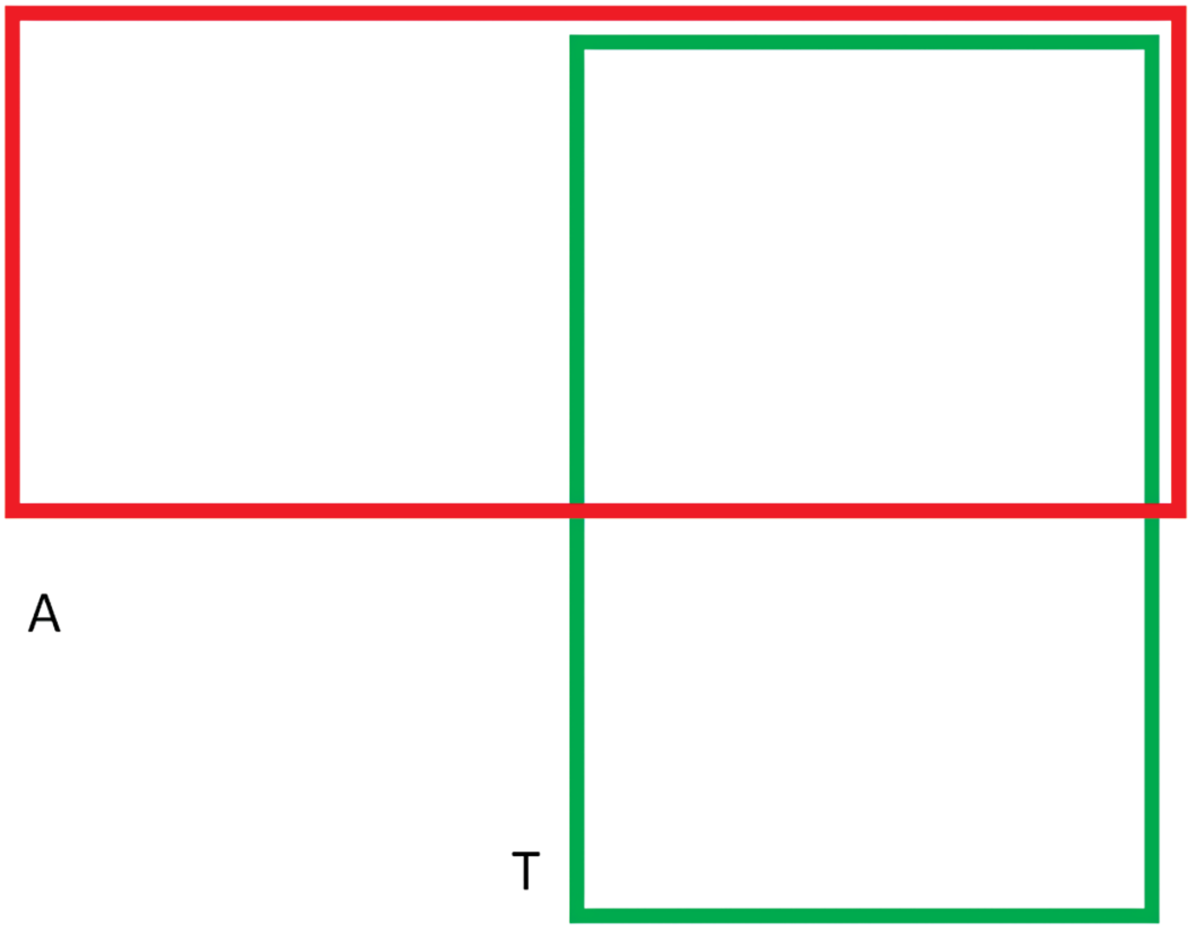
- **Óleo de soja**
- **Creolina**
- **Leite em pó**
- **Leite de soja com fruta**
- **Sabão líquido**
- **Iogurte 1l**

<pág. 21>

Atividade 9

A imagem abaixo apresenta uma visão superior de uma das prateleiras da despensa onde serão inseridos os artigos adquiridos na última compra. Na região de cor vermelha (A), vamos colocar os alimentos comprados no

supermercado e na região de cor verde, arruma-remos os produtos embalados em lata que foram trazidos nestas mesmas compras (T). Reproduza esta figura no seu caderno e arrume os produtos comprados. A seguir, responda às perguntas propostas abaixo, também em seu caderno! Atenção, não escreva neste material!



a. Você conseguiu arrumar todas as compras nestas prateleiras?

b. Que produtos ficaram na prateleira A dos alimentos?

c. Que produtos ficaram na prateleira L das latas?

d. Que produtos ficaram nas duas prateleiras juntas?

e. Que produtos ficaram nas duas prateleiras ao mesmo tempo?

f. Que produtos ficaram de fora dessas prateleiras?

******

<pág. 22>

Atividade 10

Vamos organizar as compras da seguinte forma: no conjunto A dos alimentos, L de limpeza, C dos produtos embalados em caixas e T dos produtos embalados em latas.

Escreva no seu caderno os conjuntos A, L, C e T, representando seus elementos entre chaves.Depois de ter feito isso, responda também em seu caderno às perguntas propostas abaixo. Atenção, não escreva neste material!

a. Se juntarmos os produtos dos conjuntos A e C, que produtos teremos?

b. Há produtos que estejam ao mesmo tempo em A e C? Quais são eles?

c. Juntando L e C, que produtos encontramos?

d. Há produtos que estejam ao mesmo tempo em L e T?

e. Juntando A e L, que produtos obtemos?

f. Há produtos que estejam em C e T simultaneamente?

****

Importante

Usamos o símbolo de ∪ (união) para representar o ato de juntar os elementos de dois conjuntos. As-sim, se temos dois conjuntos A e B, o conjunto A∪B é o conjunto formado pelos elementos que estão em A ou estão em B.

O símbolo ∩ (intersecção) é usado para representar os elementos que estão ao

mesmo tempo em dois conjuntos. Isso quer dizer que, se temos dois conjuntos A e B, o conjunto A∩B é o conjunto formado pelos elementos que estão em A e também estão em B.

****

Vamos fazer mais uma atividade envolvendo as operações entre conjuntos em que utilizaremos os símbolos ∪ e ∩?

<pág. 23>

Atividade 11

Você se lembra da copa do mundo de 2006? Que países participaram dessa copa? Nossa, não tem muito tempo, mas já ficou tão distante!

A seguir, colocamos uma tabela identificando esses países.

Equipes participantes			
Alemanha	Costa Rica	Irã	República Checa
Angola	Croácia	Itália	Sérvia e Montenegro
Arábia Saudita	Equador	Japão	Suécia
Argentina	Espanha	México	Suíça
Austrália	Estados Unidos	Holanda	Trinidad e Tobago
Brasil	França	Paraguai	Togo
Coreia do Sul	Gana	Polônia	Tunísia
Costa do Marfim	Inglaterra	Portugal	Ucrânia

Figura 5 - países participantes da Copa da Fifa 2006

E em 2010? Está mais recente! Vamos ver quais foram os países?

Figura 6 - países participantes da Copa da FIFA 2010

******

<pág. 24>

Atividade 11

Pense em dois conjuntos: o conjunto S (de seis), com as seleções sul-americanas que participaram da copa de 2006 e o conjunto D (de dez) com as seleções sul-americanas, participantes da copa de 2010. Atenção, não escreva neste material!

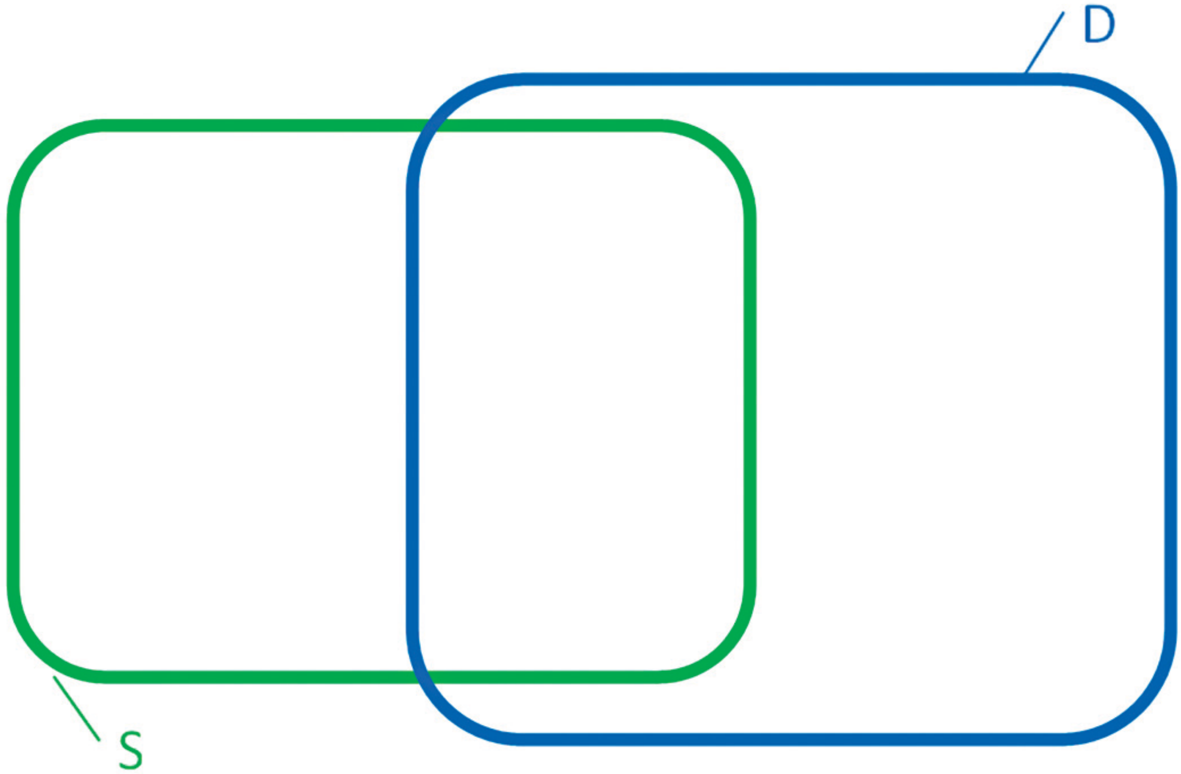
a. Quantas seleções existem no conjunto S? E no conjunto D?

b. Que seleções sul-americanas participaram das duas edições da copa do mundo de 2006 e de 2010? Represente esse conjunto (vamos chamá-lo de E) como uma operação entre os conjuntos S e D. Quantos elementos existem em E?

c. Quando listarmos as seleções sul-americanas que participaram de pelo menos uma das duas últimas copas do mundo, que seleções seriam estas? Escreva-as no conjunto T.

d. Represente T como uma operação entre os conjuntos S e D. Quantos elementos há em T?

e. Agora, copie o diagrama abaixo em seu caderno e represente essas seleções no seu diagrama.



<pág. 25>

Importante

A diferença entre dois conjuntos é a operação que resulta nos elementos que pertencem ao primeiro conjunto e não pertencem ao segundo conjunto. Representaremos a diferença entre dois conjuntos utilizando o sinal de menos (-). Assim, se tomarmos dois conjuntos A e B, A-B será o conjunto dos elementos que estão em A e não estão em B.

****

Atividade 12

Vamos retomar a atividade 11 e responder alguns itens adicionais! Anote as respostas em seu caderno.

a. Quais seriam as seleções que integrariam o conjunto S- D?

b. Que seleções estão no conjunto D – S?

****

Atividade 13

Vamos usar novamente os conjuntos A dos alimentos, L de limpeza, C dos produtos embalados em caixas e T dos produtos embalados em latas que

vimos na atividade 9? Com base no que você fez naquela atividade, responda sem eu caderno aos itens propostos abaixo!

a. Que elementos estão no com conjunto resultante de A – L?

b. Que elementos estão no conjunto resultante de L – A?

c. Que elementos estão no conjunto resultante de C – A?

d. Usando a operação diferença entre conjuntos, represente o conjunto que contém os produtos de

limpeza que não estão acondicionados em latas.

e. Novamente, usando a operação diferença entre conjuntos, represente o conjunto que contém os produtos acondicionados em caixas que não podem ser ingeridos como alimentos.

******

<pág. 26>

Vamos praticar mais um pouco?

Atividade 14

Foi feita uma entrevista com alunos de uma determinada escola. Descobriu-se que o número

de alunos que leem jornal é 40 e que 45 alunos leem revistas, sendo que 25 leem jornal e revista. Sabe-se ainda que 24 alunos não leem nem jornal e nem revista. Qual o total de alunos entrevistados?

****

Conjuntos Numéricos

Quantos números você conhece? Pra que a gente estuda Matemática? Números só existem pra complicar a vida do aluno na escola! Quem foi que inventou a Matemática? Não tinha nada melhor pra fazer?

Quantas vezes você já pensou nisso? Aposto que muitas... Mas você quer ter uma ideia da importância dos números na nossa vida cotidiana? Sua carteira de identidade é um número, seu título de eleitor é um número. Para ser motorista, é necessária uma carteira com número – e carro tem chapa, que é numero, também! Sua casa, seu prédio, seu apartamento, seu celular; sua certidão de nascimento, seu CPF, seu registro no Imposto de Renda – e, se for empresário, vai pelo mesmo caminho: o CNPJ, o alvará de localização, o faturamento - tudo é número! Estas situações – e muitas outras – foram retiradas da crônica Você é um número, (disponível em http://matematicacalculoetc.blogspot.com.br/2012/03/ voce-e-um-numero-voce-e-um-numero.html) uma das muitas que a escritora Clarice Lispector escreveu para o Jornal do Brasil, entre os anos de 1967 e 1973. Estas crônicas foram reunidas e publicadas no livro A descoberta do mundo, publicado em 1984 pela editora Rocco. O argumento da autora é que os números estão tão presentes na nossa vida que se você não tomar cuidado, vira um número até para si mesmo.

<pág. 27>

Importante

Clarice Lispector é uma das escritoras de maior expressão em nosso país. Autora de obras variadas, como A Hora da Estrela ou Felicidade Clandestina, dedicou-se à escrita e à publicação de obras literárias também voltadas para o público infantil e adolescente. Quer saber mais? Acesse

http://matematicacalculoetc.blogspot.com.br/2012/03/voce-e-um-numero-voce-e-um-numero.html

****

Você concorda com a sua afirmação de que somos números? Como você se posiciona em relação a isso? Isso é bom ou ruim? Por que os números são usados para rotular pessoas, como a autora afirma?

Tente pensar em sua vida sem os números. Seu dia a dia ficaria mais simples? Como você compraria pão, por exemplo? Como você pediria ao atendente na padaria? E como o padeiro

poderia fazer sempre o mesmo pão, fresquinho, crocante por fora e macio por dentro, ficando o mesmo tempo no forno para não queimar... Isso é difícil!

A organização em conjuntos também foi proposta aos números, para que pudessem ser agrupados segundo propriedades que pudessem atender às operações de adição e de multiplicação, realizadas entre eles. As categorias de números são nossas velhas conhecidas: naturais, inteiros, racionais e irracionais e, englobando todos, os números reais e os complexos, que somente ao

final deste curso você irá estudar.

Números Naturais

Os números naturais são aqueles que representam quantidades, atendendo a uma necessidade humana de contar objetos. Especificamente, os números naturais são os que resultam de um processo de contagem; 1, 2, 3... E esse é um processo que nunca acaba e sobre o qual desde crianças sempre refletimos, quando fazemos o questionamento: qual é o maior de todos os números?

Muitas vezes, para as crianças, esta é uma pergunta cuja resposta é simples: 100, 100000 ou ainda 10000000000 seriam possivelmente algumas das respostas dadas por elas. Mas não é difícil convencer mesmo uma criança de que "o maior de todos os números" na verdade não existe. Mesmo o 10000000000, quando somamos a ele 1 unidade, obtemos 10000000001, que é maior que 10000000000... Não conseguimos então pensar ou responder qual é o maior de todos os números.

<pág. 28>

Atividade 15

O conjunto dos números naturais tem infinitos elementos, que é o que chamamos de infinito contável. Dentro do conjunto dos números naturais, podemos encontrar vários subconjuntos infinitos também. Observe a tabela abaixo. Ela mostra alguns desses subconjuntos.

N	1	2	3	4	5	6
2n	2	4	6	8	10	12
2^n	2	4	8	16	32	64
n^n	1	4	27	256	3125	6656

N	7	8
2n	14	16
2^n	128	256
n^n	823543	16777216
N	7	8
2n	14	16
2^n	128	256
n^n	823543	16777216

N	9	10
2n	18	20
2^n	512	1024
n^n	387420489	10000000000

N	11	...
2n	22	...
2^n	2048	...
n^n	285311670611	...

Figura 7 – Tabela: Subconjuntos infinitos dos números naturais.

Agora responda em seu caderno às seguintes questões:

a. Que elementos estão representados na primeira linha da tabela? E na segunda linha? E na terceira? E na quarta?

b. Se prosseguirmos na primeira linha desta tabela infinitamente, seguindo todos os números naturais, ela terá mais ou menos elementos que as linhas que estão abaixo dela?

c. Qual das linhas terá, seguindo-as infinitamente, mais elementos?

****

Importante

O conjunto dos Números Naturais é representado pela letra ℕ. Veja:ℕ={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,..., 12528, 12529, 12530, ..., 9547258, 9547259, ...}

****

<pág. 29>

Números Inteiros

Com o passar dos anos, após o surgimento das relações comerciais e bancárias, o homem viu a necessidade de representar valores monetários de forma oposta, ou seja, o lucro e o prejuízo. Por exemplo, não

bastava escrever 5 moedas de ouro, é necessário saber se o comerciante receberia as 5 moedas, ou faria o oposto, pagaria estas 5 moedas. Essa e outras situações dão origem a um novo número: o número negativo.

O conjunto dos números inteiros é uma expansão dos números naturais e englobam todos os números naturais e os simétricos ou opostos a eles.

Verbete

Simétricos

Números simétricos ou opostos são números que

têm o mesmo valor absoluto, mas sinais opostos. Por exemplo, -4 e +4 são números simétricos ou opostos.

****

O conjunto dos números inteiros é representado pela letra ℤ e compreende os números naturais, os seus simétricos e o zero. Veja:

ℤ = {..., -12547, -12546, ..., -108, -107, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., 107, 108, ... 12546, 12547, ...}

Uma coisa interessante que vale a pena observarmos aqui é que o conjunto dos números

naturais é um subconjunto do conjunto dos números inteiros. Ou ainda, simbolicamente, podemos representar isso por $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Importante

A presença do símbolo * (asterisco) ao lado superior direito da letra que simboliza o conjunto, representa que o elemento zero não pertence ao conjunto.Por exemplo, o conjunto $\mathbb{Z}^*$ não tem o elemento zero.

****

<pág. 29>

Números racionais

Os números racionais são todos os números que podem ser escritos na forma de fração. Vamos ver que números são esses?

- **Todos os números inteiros podem ser escritos como fração, basta pensarmos em $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \ldots = \frac{36}{12} = \ldots$ ou em $-7 = \frac{-7}{1} = \frac{-14}{2} = \frac{-21}{3} = \ldots = \frac{-63}{9} = \ldots$**

- **Todos os números decimais com quantidade (chamados também de decimais exatos) podem ser escritos como fração. Veja:**

$$0,56 = \frac{56}{100} = \frac{14}{25}$$ **ou então**

$$13,2 = \frac{132}{10} = \frac{66}{5}$$ **ou ainda**

$$-0,0053 = \frac{-53}{1000}$$

- **Todos os decimais com quantidade infinita de casas decimais, mas periódicos (também conhecidos como dízimas periódicas). Vamos lembrar?**

a) $0,\overline{2}=0,22222...=\dfrac{2}{9}$

b) $-0,\overline{45}=-0,454545...=$
$\dfrac{-45}{99}=\dfrac{-5}{11}$

c) $-0,432=-0,43222...=$
$\dfrac{-389}{90}$

d) $3,291=3,2919191...=$
$3+0,2919191...=$
$3+\dfrac{289}{990}=\dfrac{3259}{990}$

Importante

O conjunto dos números racionais é representado pela letra $\mathbb{Q}$ e contém todos os números que podem ser escritos como fração. Simbolicamente, esse conjunto pode ser representado dessa forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b},\ a \in Z,\ b \in Z^{*} \right\}$$

Vamos compreender isso?

Bem, $\mathbb{Q}$ é a representação para o conjunto dos números racionais. $\frac{a}{b}$

representa uma fração qualquer, com numerador *a* e denominador *b*, portanto, a ∈ ℤ indica que a, ou seja, o numerador da fração, pode ser qualquer número inteiro. Entretanto, b ∈ ℤ* destaca o fato de que b também pode assumir o valor de qualquer número inteiro que não seja zero.

****

É interessante ver que todos os naturais e todos os inteiros também são números racionais. Isso pode ser escrito assim:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

<pág. 31>

Mas será que todos os números podem ser escritos como fração? A resposta é não. E o conjunto dos números que não podem ser escritos como fração, ou seja, dos números que não são racionais, é chamado de conjunto dos números irracionais, que é o que vamos ver no item abaixo.

Números Irracionais

O conjunto dos números irracionais é o conjunto formado por todos os números que não podem ser escritos sob a forma de

fração. Sabemos então dizer quais números não são irracionais:

.Nenhum inteiro ou natural é irracional;

.Nenhum decimal exato é irracional;

.Nenhum decimal infinito periódico (dízimas periódicas) é irracional.

Os números irracionais são então números decimais com uma quantidade infinita de casas decimais e sem caráter periódico.

Alguns números irracionais que são muito conhecidos por nós são o π e as raízes não exatas, como

$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{-5}$ ou $\sqrt[5]{-10}$ .Mas existem outros, por exemplo:
1,01001000100001...,
2,3214325170000018526...

Importante

O conjunto dos números irracionais é representado por *Q*(em alguns livros, o conjunto dos irracionais é representado por I) e pode ser escrito simbolicamente como

$$\overline{\mathbb{Q}} = \{x, x \notin \mathbb{Q}\}$$

Essa notação quer dizer exatamente o que

escrevemos acima: é irracional o número que não é racional.

******

Observe que, diferente dos naturais, inteiros e racionais que mantêm entre si uma relação de um estar dentro do outro, para os irracionais isso não acontece. E sabe

por quê? Porque $\mathbb{N} \not\subset \overline{\mathbf{Q}}$, $\mathbb{Z} \not\subset \overline{\mathbf{Q}}$

e $\mathbb{Q} \not\subset \overline{\mathbf{Q}}$.

Mas o que significa essa barrinha acima do Q que colocamos para representar os irracionais? Vamos

entender isso melhor? Para isso, vamos ver os números reais!

<pág. 32>

Números Reais

O conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) é o conjunto que reúne todos os conjuntos que vimos até agora: naturais, inteiros, racionais e irracionais. Ele não lança exatamente um tipo diferente de número: na verdade, ele cria uma categoria de números, que são os números que são racionais ou irracionais.

Simbolicamente então, representamos o conjunto dos números reais assim:

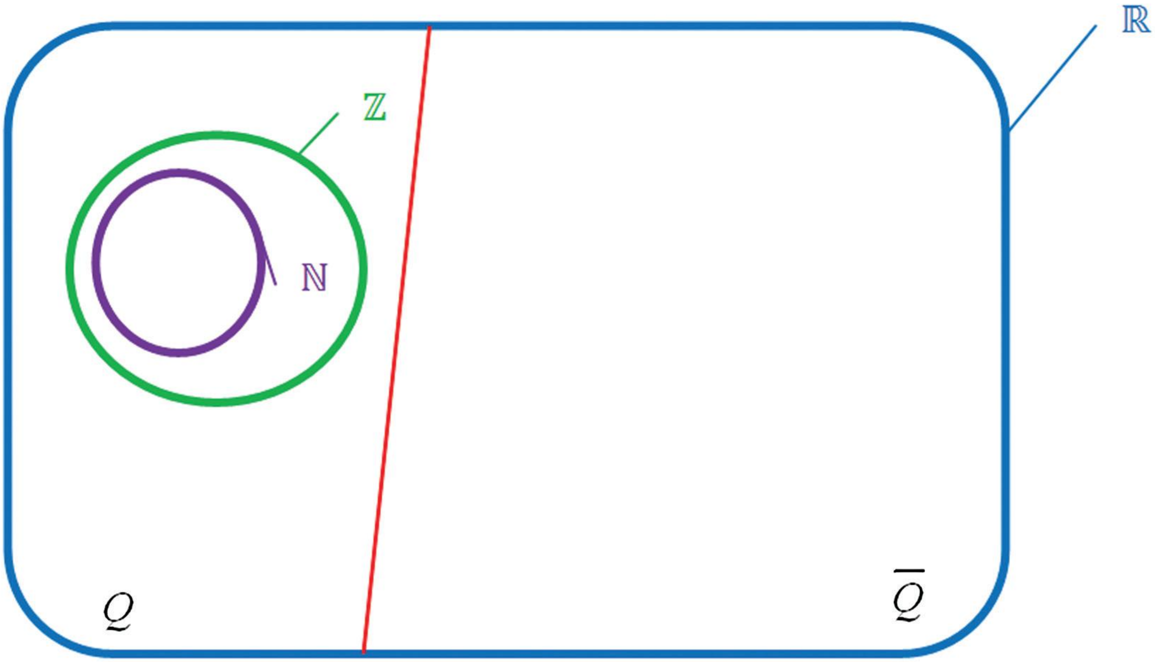
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}}$$

A barrinha que fica acima do $\mathbb{Q}$ quando vamos indicar o conjunto dos números irracionais significa que o conjunto $\overline{\mathbb{Q}}$ é o que falta ao conjunto $\mathbb{Q}$ para se tornar igual ao conjunto $\mathbb{R}$. O conjunto que contém a barrinha é conhecido como conjunto complementar. No nosso caso, podemos dizer

que $\mathbb{Q}$ é o complementar de $\mathbb{Q}$ em relação a $\mathbb{R}$.

Importante

A representação em diagramas dos números reais é bem interessante. Veja!



Vamos compreender bem o que esse diagrama representa? Todos os números que você já estudou até agora são

números reais e estão dentro da linha azul no diagrama acima. O conjunto dos números reais, delimitado pela linha azul, está organizado em dois grandes grupos: o dos números racionais e o dos números irracionais. Por sua vez, há alguns tipos interessantes de números racionais que são os números inteiros. Os números inteiros que não são negativos são chamados de números naturais.

<pág. 33>

Sabe que números não são reais? Os números que resultariam de contas que não têm resposta, ou seja, que são impossíveis de serem realizadas, como as divisões por zero ou as raízes de índice par, para radicandos negativos (como $\sqrt{-4}$ ou $\sqrt[8]{-18}$, por exemplo).

Uma forma interessante de apresentar os números é a reta numérica. Você já a conhece! Vamos retomá-la?

As atividades que apresentamos a seguir

abordam os números, de todos os tipos que vimos acima. Atenção: responda sempre em seu caderno, não escreva nesse material!

Atividade 16

Você conhece o papel quadriculado? Pegue uma folha desse papel e trace um segmento de reta de tamanho igual a 30 lados de quadrado e marque os números 0 e 1 em seus extremos. Agora , marque neste segmento as frações:

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{4}{6},\ \frac{3}{10},\ \frac{5}{10},\ \frac{12}{18},\ \frac{6}{8}$$

a. Dentre as frações listadas, há mais do que uma associada a um mesmo ponto na reta?Quais são elas?

b. Por que isso aconteceu?

****

Atividade 17

Defina abaixo, entre quais valores inteiros consecutivos se localiza cada fração:

a. $\frac{2}{3}$

b. $\frac{1}{2}$

c. $\frac{-4}{5}$

d. $\frac{7}{2}$

******

<pág. 34>

Atividade 18

Usando uma calculadora simples, realize as seguintes atividades:

Digite a sequência de teclas 1+ = = = ... e observe os resultados.

a. Que número apareceu no visor da calculadora após

o 8º sinal = pressionado? E após o 9º? E depois do 10º?

b. Reinicie o mesmo processo a partir de 0,1 e não de 1, digitando na calculadora 0.1 + = = = ... e observando o resultado. Prossiga, registrando os números mostrados no visor, até o sétimo sinal = pressionado. Sem continuar a pressionar a tecla = , escreva quais os três próximos resultados, indo a seguir na calculadora. Por que isso aconteceu?

c. Agora, sem usar a calculadora: se você começar no 0,01, qual o resultado que deverá aparecer no visor da

calculadora depois do 9º pressionar da tecla =?

****

Atividade 19

Vamos pensar no número decimal 3,004.

a. Este número está mais próximo de 3 ou de 4? Por quê?

b. Está mais próximo de 3 ou de 3,1? Por quê?

c. Está mais próximo de 3 ou de 3,01? Por quê?

****

<pág. 35>

Atividade 20

Dê exemplos de 10 números racionais entre $\frac{17}{3}$ e $\frac{41}{5}$.

******

Atividade 21

Quem é o maior? Vamos arrumar em ordem crescente? Você pode usar uma calculadora para facilitar seus cálculos se quiser.

a. $\frac{23}{9}$; 3, 6; $\frac{17}{6}$

b. Raiz quadrada de 3; 1,732; 1,733

c. $\frac{-5}{12}$; raiz quadrada de 4; menos raiz cúbica de 8

d. $1\frac{3}{5}$; 1,4; $\frac{4}{5}$; 1,333...; 1,334

******

Subconjuntos da reta real: os intervalos

O conjunto dos números reais é infinito também, assim como o conjunto dos naturais também é. Mas são tipos de infinito diferentes,

é como se o conjunto dos reais fosse "mais infinito" que o conjunto dos números naturais. Vamos ver por quê?

<pág. 36>

Quantos números naturais existem entre 2 e 4? Apenas o 3, concorda? E quantos números inteiros existem entre 2 e 4? Também só o 3. Agora, pense mais um pouco e responda: quantos números racionais existem entre 2 e 4? Será também só o 3?

A resposta é NÃO! Por exemplo, 2,1 é um número

racional e está entre 2 e 4. A fração $\frac{19}{5}$ também é um número racional e está entre 2 e 4. 2,000001; 3,8703; 3,44444..., entre infinitos outros, também são números racionais existentes entre 2 e 4. Mesmo que tomemos intervalos bem pequenos, sempre conseguimos encontrar outros racionais entre os extremos do intervalo. Quer ver mais um exemplo?

Que racionais podem existir entre 2 e 3? Bom, podemos pensar em 2,1; 2,2; 2,3; etc. E entre 2,2 e

2,3 temos o 2,21; 2,22; 2,23; entre 2,21 e 2,22 temos o 2,211, 2,212, 2,213 etc. e isso num processo infinito! Nunca acaba! A quantidade de racionais existentes entre dois racionais quaisquer é infinita!

Saiba Mais

Quer saber mais sobre isso? Acesse o link http://www.uff.br/cdme/edn/edn-html/edn-pos-br.html, nele você vai encontrar uma atividade interativa muito interessante e que o ajudará muito a visualizar o que estamos falando agora.

******

E com os irracionais, será que ocorre o mesmo que com os racionais? Novamente a resposta é SIM! Há infinitos irracionais entre dois irracionais quaisquer! Quer ver um exemplo? Entre $\sqrt{2}$ e π, por exemplo, podemos destacar $2\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $2\ \frac{\pi}{2}$ (lembre-se que 1,41 e 3,14 são aproximações decimais para $\sqrt{2}$ e π), entre infinitos outros.

Esse tipo de infinito que também diferencia os números naturais e inteiros dos racionais, irracionais e reais, podem complicar bastante para escrever subconjuntos dos números reais. Por exemplo, se quisermos escrever o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x < 5\}$, podemos escrever $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, ou ainda, o conjunto $B = \{x \in \mathbb{Z} / x < 5\}$, ele poderá ser escrito assim: $B = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Entretanto, se o conjunto for $C = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x < 5\}$, ou seja, o conjunto formado por todos os números reais entre -3 e 5, como

poderíamos escrever esse conjunto? Ou o conjunto D = $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x < 5\}$, que engloba todos os números reais menores que 5, como ficaria? Difícil isso, concorda?

A solução para esse problema é usar o que conhecemos como intervalos reais.

<pág. 37>

Importante

Um intervalo real é um segmento de reta na reta numérica, ou seja, é um subconjunto sem

interrupções intermediárias do conjunto dos números reais.
****

Já vimos que não conseguiremos escrever todos os seus elementos... A saída é usarmos um instrumento poderoso: a reta numérica! Quer ver como fazemos isso?

Como exemplo, vamos representar o conjunto $C = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ -3 < x < 5\}$?

Prático, não? O uso da reta numérica indica que, no trecho em vermelho, estão

todos os números entre -3 e 5.

Mas há ainda um problema aqui...Quer ver qual é? Observe o seguinte intervalo:

$C_1 = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -3 \leq x < 5\}$

Vamos representá-lo na reta?

Qual a diferença entre a representação na reta numérica de C e de C1? Somente olhando a representação na reta, você consegue perceber qual a

diferença entre os intervalos C e C_1?
Bem, olhando para os intervalos representados na reta numérica, não há diferença alguma! Mas quando olhamos para a representação na notação de conjunto, vemos que $-3 \in C_1$, mas $-3 \notin C$, uma vez que em C temos $-3 < x < 5$ e em C_1 temos $-3 \leq x < 5$.

Nosso problema agora é pensar em uma maneira que nos permita, simplesmente olhando a representação do intervalo na reta numérica, fazer a distinção entre C e C_1. A estratégia que

utilizaremos para resolver essa questão é associar uma bolinha fechada (•) ao elemento que queremos incluir na representação na reta numérica ou uma bolinha aberta (O) ao elemento que não pertence ao intervalo, mas apenas o limita. Veja abaixo como essa estratégia mostra-se excelente para resolver esta questão!

<pág. 28>

Prático, concorda?

Veja agora, no geral, como representamos os intervalos reais!

Neste ponto do livro há uma tabela. Consulte o professor.

Algumas associações que podemos fazer são as seguintes:

a. Em um intervalo com extremo pertencente ao conjunto, usamos os sinais de desigualdade com o igual _ ou _ na notação de conjunto. Na reta numérica, a inclusão do extremo é feita por meio de uma bolinha fechada•. Na notação de intervalo, os colchetes voltados para dentro indicam a inclusão do extremo ao qual estão associados [ou].

b. Em um intervalo com extremo não pertencente ao conjunto, usamos os sinais de desigualdade sem o igual < ou > na notação de conjunto. Na reta numérica, a inclusão do extremo é feita por meio de uma bolinha aberta O. Na notação de intervalo, os colchetes voltados para fora

] , [ou os parênteses (,) indicam que o extremo ao qual estão associados não pertencem ao conjunto.

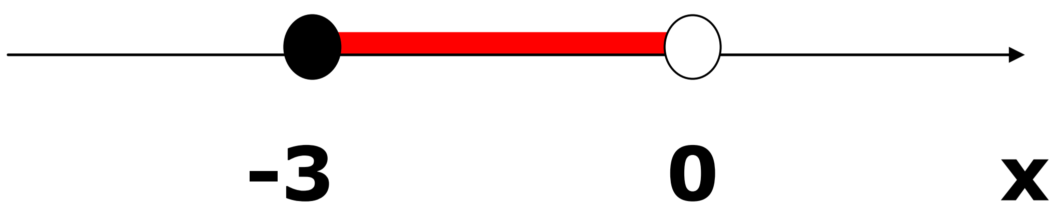
<pág. 39>

c. Um símbolo novo também está sendo apresentado a você agora: o símbolo do infinito, que é um 8 deitado: −_]],*a* . Este símbolo pode ser associado ao sinal +, gerando *a*,+_[), que representa o infinito positivo, no sentido para a direita na reta real, ou ao sinal de -, gerando −_]],*a*. Representando o infinito negativo, no sentido para a esquerda na reta real. O símbolo é usado na representação dos intervalos por notação de intervalo, que podemos visualizar na terceira coluna da tabela acima.

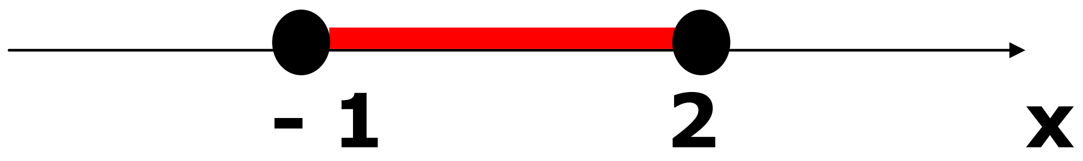
Vamos ver alguns exemplos?

1. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais compreendidos entre 1 e 3, incluindo o 3. Podemos escrevê-lo como $\{ x \in \mathbb{R} \ / \ 1 < x \leq 3\}$, usando notação de conjunto, ou]1;3] ou ainda (1;3], usando notação de intervalo.

2. O intervalo representado abaixo, contém todos os números reais compreendidos entre -3 e 0, incluindo o -3. Podemos escrevê-lo como como $\{ x \in \mathbb{R} \ / \ -3 \leq x < 0\}$, usando notação de conjunto, ou $[-3,0[$ ou ainda $[-3,0)$, usando notação de intervalo.

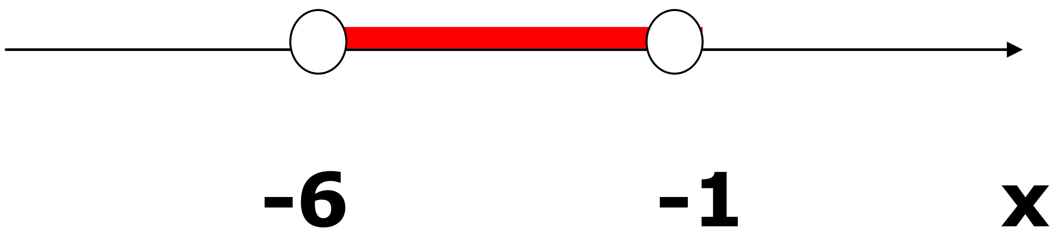


3. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais compreendidos entre -1 e 2, incluindo os dois extremos. Podemos escrevê-lo como $\{ x \in \mathbb{R} \ / -1 \leq x \leq 2 \}$, usando notação de intervalo.

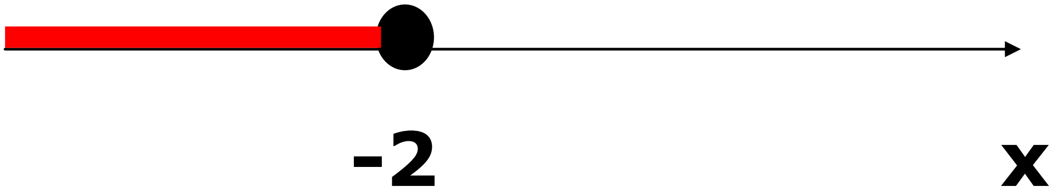


4. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais compreendidos entre -6 e -1, mas sem incluir nenhum dos dois extremos. Podemos escrevê-lo como

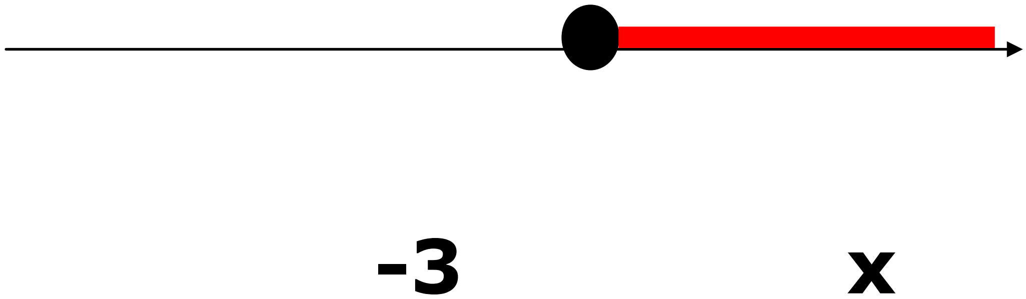
{ x ∈ ℝ / -6 < x < -1}, usando notação de conjunto, ou]-6; -1[ou ainda (-6; -1), usando notação de intervalo.



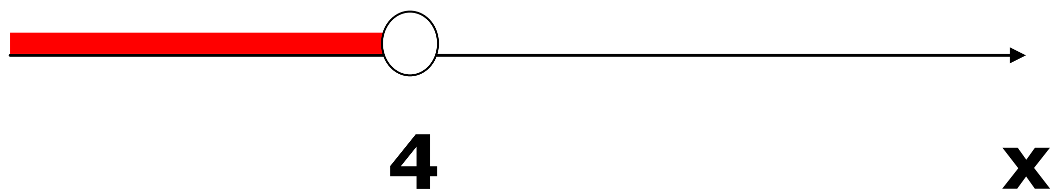
5. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais que são menores que -2, incluindo o -2. Podemos escrevê-lo como { x ∈ ℝ / x ≤ -2}, usando notação de conjunto, ou]-∞; -2] ou ainda (-∞; -2], usando notação de intervalo.



6. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais que são maiores que -3, incluindo o -3. Podemos escrevê-lo como $\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq -3\}$, usando notação de conjunto, ou $[-3; \infty[$ ou ainda $[-3; +\infty)$, usando notação de intervalo.

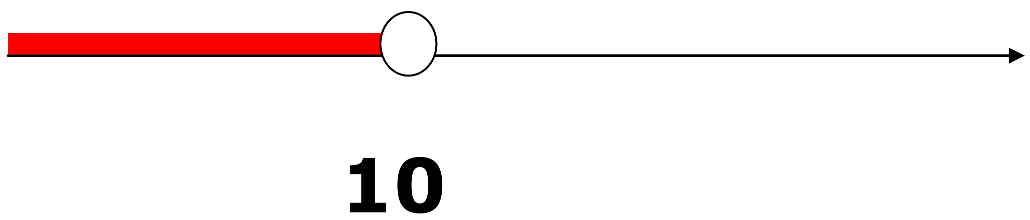


7. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais que são menores que 4, sem incluir o 4. Podemos escrevê-lo como $\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x < 4\}$, usando notação de conjunto, ou]-∞; 4[ou ainda (-∞; 4), usando notação de intervalo.



8. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais que são maiores que 10, sem incluir o 10. Podemos escrevê-lo como

$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 10\}$, usando notação de conjunto, ou $]10;+\infty[$ ou ainda $(10; +\infty)$, usando notação de intervalo.



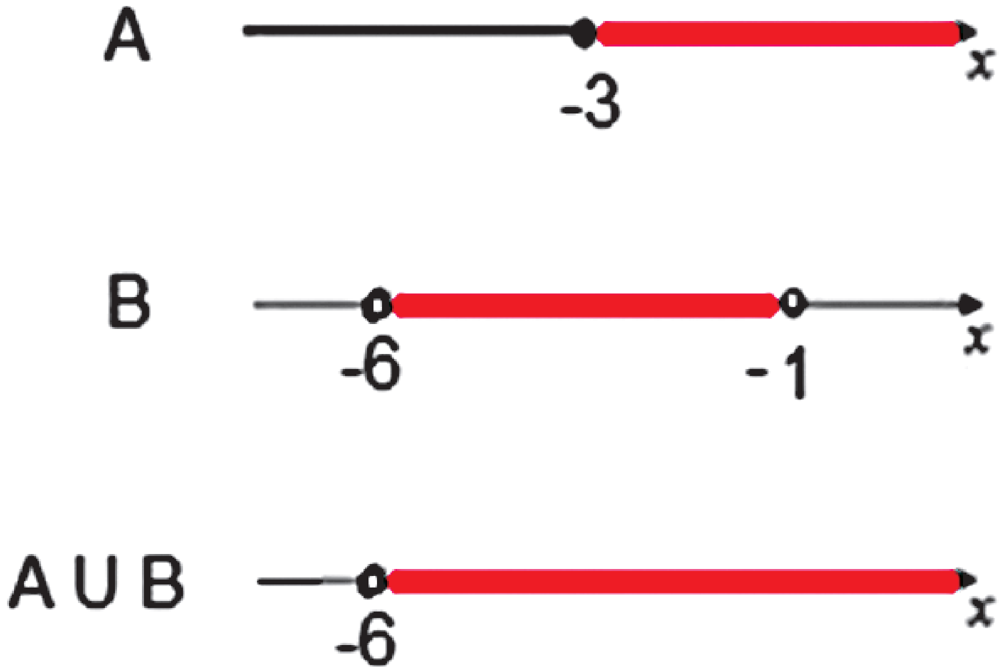
Operações com Intervalos Reais

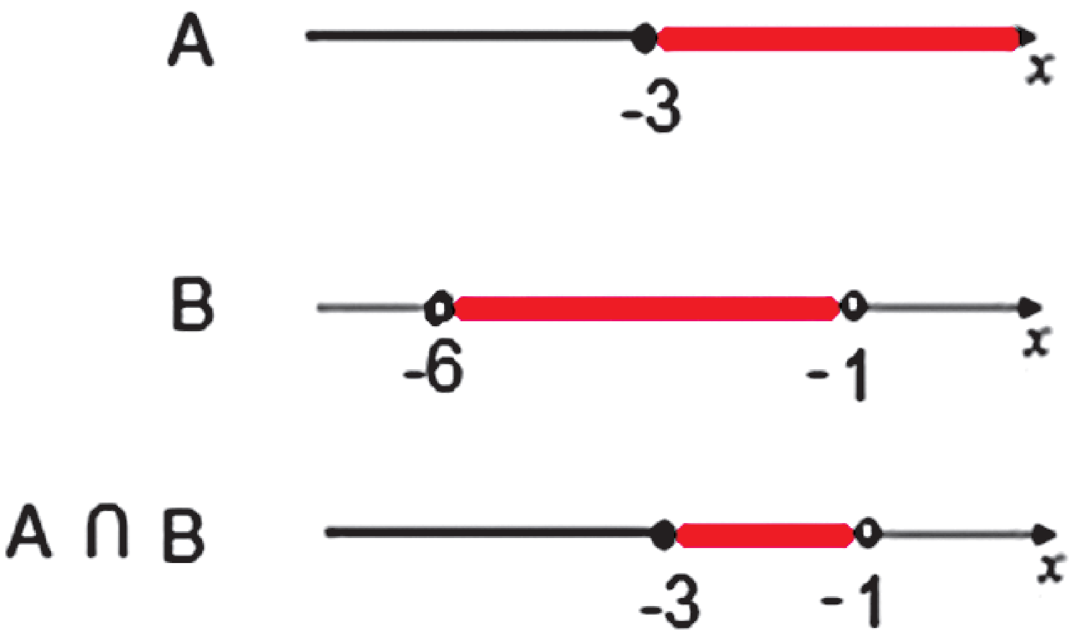
Como os intervalos numéricos são conjuntos, as operações de união ($\cup$) e interseção ($\cap$) podem ser realizadas entre eles. A lógica é exatamente a mesma: quando unimos dois

intervalos, juntamos todos os elementos dos dois intervalos em um só; quando fazemos a interseção entre dois intervalos, buscamos o que há de comum nos dois. Vamos ver como isso funciona?

Vamos fazer juntos, como exemplo, a união e a interseção dos intervalos A = x $\in \mathbb{R}$ / x ≥ -3} e B =]-6; -1[. Uma sugestão que ajuda muito é fazer a representação na reta numérica para visualizar melhor as operações.

<pág. 41>





A ideia, na união, é de juntar os dois intervalos em um só, como se as duas representações na reta numérica se sobrepusessem e demarcássemos na união tudo que ficou pintado em um só dos conjuntos ou nos dois. Para a interseção, a ideia é a mesma, a de sobreposição, mas aí vamos marcar apenas o "pedaço"

que ficou pintado nos dois intervalos ao mesmo tempo. E como respondemos então? Simples, retomando a representação em notação de conjunto e/ou em notação de intervalo para A ∪ B e para A ∩ B. Veja!

$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > -6\}$ ou
$A \cup B =]-6; +\infty[= (-6; +\infty)$

$A \cup B =]-6; +\infty[= (-6; +\infty)$
ou $A \cap B = [-3;-1[= [-3; -1)$

Vamos praticar isso um pouco para finalizar esta aula? Agora é com você!

Atividade 22

Vamos fazer a união e a interseção dos intervalos A e B, apresentados em cada item que se segue? Use o seu caderno!

a. $A = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ -2 < x \leq 5\}$ e $B = \,]-\infty, 0[$

b. $A = [3, 5[$ e $B = \{ x \in \mathbb{R} / \ 2 \leq x \leq 10\}$

c. $A = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq -5\}$ e $B = [-6; 0[$

d. $A = \,]-\infty, 1 [$ e $B = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq -1\}$

e. $A = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x < -4\}$ e $B = [2; +\infty)$

****

Nesta aula, nós estudamos alguns conceitos que são fundamentais para o prosseguimento nos estudos do Ensino Médio. Toda a Matemática está estruturada, tomando como suporte o Estudo dos Conjuntos, que é o que permite dar à Matemática o seu caráter filosófico de precisão. Por essa razão, damos início ao estudo de Matemática no Ensino

Médio, justamente estudando os Conjuntos.

Além da estrutura de conjuntos, vimos também os conjuntos numéricos – este é um momento em que podemos amadurecer tudo que já estudamos até hoje sobre números e operações com números. A organização dos números em conjuntos que os agrupam por suas semelhanças é primordial para que possamos estruturar as operações que realizamos entre eles. Este estudo também nos permite visualizar um pouco de alguns ramos extremamente importantes em Matemática,

que são a Teoria dos Números e a Álgebra, além de nos apresentar uma nova estrutura de representação de subconjuntos contínuos dos números reais, que são os intervalos reais. Particularmente, a representação e as operações com Intervalos ainda serão muito usadas nas aulas seguintes. Então, não se permita concluir esta aula com dúvidas, retome o estudo, consulte seu professor e a Internet, certo?

Um abraço e até a próxima!

Resumo

.Conjuntos são objetos matemáticos que relacionam elementos de acordo com o que eles têm de semelhança ou de regularidade.

.Um elemento pode pertencer (∈) ou não pertencer (∉) a um conjunto.

. Um conjunto pode estar contido (⊂) ou não estar contido (⊄) em outro conjunto.

.Uma parte ou um subconjunto de um conjunto dado é outro conjunto que tem todos os seus

elementos pertencentes ao primeiro conjunto.

.A União (∪) entre dois conjuntos é o conjunto formado por todos os elementos que estão nos dois conjuntos ao mesmo tempo ou em apenas um deles.

.A intersecção (∩) entre dois conjuntos é o conjunto formado por todos os elementos que estão nos dois conjuntos simultaneamente.

.O conjunto dos números naturais (N) é formado pelos números que resultam de contagem, como 1, 2, 3, 4, 5, etc.

.O conjunto dos números inteiros (Z) é formado por todos os números naturais e os seus simétricos -1, -2, -3, etc.

<pág. 43>

.O conjunto dos números racionais (Q) é formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração, ou seja, todos os naturais, os inteiros, os decimais exatos ou periódicos e as frações propriamente ditas.

.O conjunto dos números irracionais (I ou ____=_) é formado por todos os números que não podem ser

escritos como fração. Estes números têm a forma de números decimais que são infinitos e não são periódicos, como o número ou os resultados de raízes não exatas.

.O conjunto dos números reais (R) é o conjunto que representa a união entre racionais e irracionais.

Veja Ainda

.Procure na Internet sobre a vida e a obra de Georg Cantor, onde nasceu, período em que viveu. Ele teve uma importância enorme no estudo dos conjuntos. Algumas

sugestões de sites na Internet onde você pode saber mais sobre Cantor seguem abaixo:

.http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/cantor/vidacantor.htm

.http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/veiculos_de_comunicacao/RPM/RPM43/RPM43_02.PDF

.http://www.seara.ufc.br/especiais/matematica/transfinitos/transfinitos5.htm

.Existem outras constantes matemáticas também

incomensuráveis com a unidade. Aqui falamos do π, procure saber do e e do φ. O número e, em homenagem a Euler, aparecerá no estudo das funções exponenciais e logarítmicas. Já o número φ é conhecido como número de ouro. O site http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html apresenta algumas atividades muito boas sobre o número de ouro e o retângulo áureo.

.O Laboratório Virtual de Matemática da UNIJUÍ – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – localizada

em Ijuí, RS, oferece algumas atividades muito interessantes sobre os temas que estudamos nessa aula. Vale a pena experimentar! Acesse os links:

. Operações com Conjuntos:

http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/medio/conj_func/encomendas/opera_conjuntos/index.html

. Conjuntos Numéricos

http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/medio/conj_func/encomendas/conj_num.htm

. Operações com Intervalos Reais

http://projetos.unijui.edu.br/matematica/medio/index.html

<pág. 44>

.Há alguns vídeos no Youtube que podem ser bastante interessantes para aprofundar e ampliar o conhecimento sobre os números. Um deles é http://www.youtube.com/watch?v=f1Ak-6vMVpg, que trata do infinito. Vale a pena conferir!

Referências

.BOYER, Carl B. História da Matemática. Georgetown: Edgard Blucher, 1991. 479 páginas.

.IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos da Matemática Elementar 1 – Conjuntos e funções. São Paulo: Atual Editora Ltda, 1977. 316 páginas.

.LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio – Volume 1. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1999. 237 páginas.

Respostas das atividades
Atividade 1

Ainda refletindo sobre o que comentamos na correção da atividade 3, vemos que:

a. (∈) Abacate não pertence ao conjunto de frutas representado pela cesta.

b. (∉) uva não pertence ao conjunto T representado pela turma.

c. (∈) O livro de história pertence ao conjunto B de Biblioteca.

d. (∈) A fruta banana pertence ao conjunto F de

frutas representado pela cesta.

e. (∈) A fruta uva pertence ao conjunto F de frutas representado pela cestaf. (∉) A fruta uva não pertence ao conjunto B de Biblioteca.

<pág. 45>

Atividade 2

a. O livro de história pertence ao conjunto Biblioteca.

b. Abacate não pertence ao conjunto Turma.

c. Uva não pertence ao conjunto Turma.

d. Banana pertence ao conjunto Frutas.

Atividade 3

a. $B \subset F$

b. $M \subset F$

c. $G \not\subset F$

d. $B \subset M$

e. $G \not\subset M$

f. $B \not\subset G$

Atividade 4

a. F, pois o elemento f (física) não pertence a U.

b. V todos os elementos de B pertencem a U.

c. F, o livro de geografia não pertence ao conjunto B.

Atividade 5

Vamos associar os sanduiches aos símbolos s1, s2, s3 e s4.

Vamos associar as bebidas aos símbolos b1 e b2.

Vamos associar os acompanhamentos com a1 e a2. Teremos:

{s1,r1,a1}; {s1,r1,a2}; {s1,r2,a1}; {s1,r2,a2}

{s2,r1,a1}; {s2,r1,a2}; {s2,r2,a1}; {s2,r2, a2}

{s3,r1,a1}; {s3,r1,a2}; {s3,r2,a1}; {s3,r2, a2}

<pág. 46>

Atividade 6

Resposta pessoal

Atividade 7

a. {M, A, T, E}

b. {C, O, N, J, U, T} – observe que não colocamos as letras repetidas no conjunto B.

c. {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

d. {11, 12, 13, 14, 15, ...} – esse é um conjunto que tem infinitos elementos.

e. { } ou E = Ø - não há números negativos entre 2 e 4. Isso quer dizer que esse é um conjunto vazio!

Atividade 8

P(M)={{ }, {p}, {a}, {i}, {p,a}, (p,i}, {a, i}, {p,a,i}}

Atividade 9

Refrigerante 2L
Detergente
Sabão em pó
Atum sólido
Leite em caixa
Inseticida
Spray
Óleo de Soja
Creolina
Leite em pó
Leite de soja com fruta
Sabão líquido
Iogurte 1L

Refrigerante 2L

Leite em caixa

Leite em soja com fruta

Iogurte 1L

Leite em pó

Óleo de soja

Atum sólido

Inseticida spray

Creolina

A

T

a. Não, há produtos que ficaram de fora.

b. Ver na figura acima.

c. Ver na figura acima.

d. Ver na figura acima – leite em pó, óleo de soja, atum sólido.

e. Sabão líquido, sabão em pó e o detergente.

<pág. 48>

Atividade 10

A={refrigerante 2L, Leite em caixa, leite em pó, leite de soja com fruta, óleo de soja, atum sólido, iogurte 1L}

C={leite em caixa, leite de soja com fruta, sabão em pó}

T={leite em pó, inseticida spray, óleo de soja, óleo de soja, atum sólido, creolina}

L={detergente, inseticida spray, sabão em pó, sabão líquido, creolina}

a. Os produtos alimentícios ou produtos que são embalados em caixas. Podemos representar como A∪C.

b. São somente os alimentos que são embalados em caixas. Podemos representar como A∩C.

c. Produtos de limpeza ou produtos que são acondicionados em caixas. Podemos representar como L∪C.

d. Não, pois não há produtos de limpeza que sejam comestíveis. Podemos representar como L∩T=Ø.

e. Produtos alimentícios ou produtos de limpeza, ou seja, a lista toda de D. Sônia. Podemos representar como A∪L.

f. Sim, são os produtos de limpeza que são embalados em caixas. Podemos representar como C∪T.

<pág. 49>

Atividade 11

S = {Argentina, Brasil, Equador, México, Paraguai, Trinidad e Tobago}

D = {Brasil, Argentina, Honduras, México, Chile, Paraguai, Uruguai}

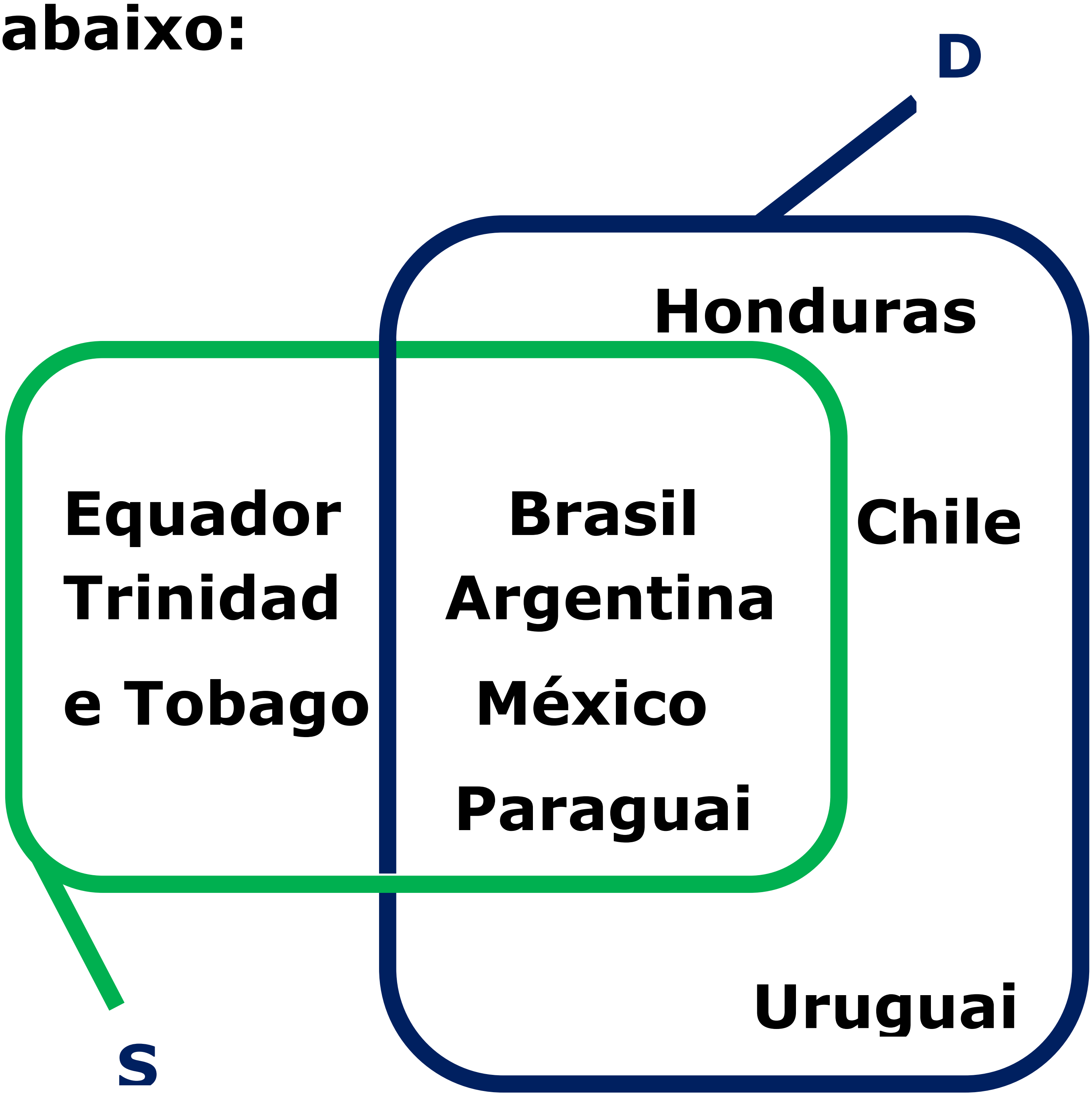
a. O conjunto S tem 6 elementos e o conjunto D tem 7 elementos.

b. E = S ∩ D = { Brasil, Argentina, México, Paraguai}. O conjunto E tem 4 elementos.

c. T = S ∪ D = {Argentina, Brasil, Equador, México, Paraguai, Trinidad e Tobago, Honduras, Uruguai}.

d. A operação é de união entre S e D.O conjunto T tem 8 elementos.

e. Veja no diagrama abaixo:



Atividade 12

a. S – D {Equador, Trinidad e Tobago}

b. D – S = {Honduras, Chile, Uruguai}

<pág. 50>

Atividade 13

a. A – L= A, pois não há produtos alimentícios que possam estar no conjunto dos produtos de Limpeza;

b. L – A = L, pois não há produtos de limpeza que possam estar no conjunto dos produtos alimentícios.

c. São os produtos que são embalados em caixas,

mas não são alimentícios.
C – A = {sabão em pó}
d. L – Ce. C – A

Atividade 14

Leem jornal – 40
Leem revista – 45
Leem os dois – 25

Note que estes 25 alunos são contados duas vezes (para os que leem jornal e para os que leem revista. Logo teremos:

40 – 25 = 15
45 – 25 = 20

Podemos concluir que o total de entrevistados é: 15 (jornal) + 20 (revista) + 25

(jor-nal e revista) + 24 (nenhum) = 84 alunos entrevistados

Atividade 15

a. Na primeira linha da tabela, estão todos os números naturais não nulos; na segunda linha, os números pares; na terceira linha, todos os resultados das potências de base 2 para expoente não nulo e na quarta linha encontramos os resultados de todas as potências de naturais do tipo nn, para n não nulo.

b. Terá nem mais nem menos elementos, porque as linhas 2, 3 e 4 são

determinadas a partir dos elementos escritos na primeira linha. Logo, para cada elemento da linha 1 há um elemento correspondente em cada uma das outras linhas.

c. Todas as linhas terão a mesma quantidade de elementos.

<pág. 51>

Atividade 16

a. Neste exercício, a localização dos números será:

15 quadradinhos – ½, 5/10

22,5 quadradinhos – ¾, 6/8

20 quadradinhos - 2/3, 4/6, 12/18

12 quadradinhos – 2/5

9 quadradinhos – 3/10

b. As frações que ficam no mesmo lugar são as frações equivalentes

Atividade 17

a. Entre 0 e 1

b. Entre 0 e 1

c. Entre 0 e -1

d. Entre 3 e 4

Atividade 18

a. Na 8ª vez que pressionarmos a tecla =, obtemos 9; na 9ª vez, 10 e na 10ª vez 11.

b. 0.2; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8. Os próximos serão 0.9; 1.0 e 1.1

c. Vai aparecer 0.1, porque quando pressionamos 9 vezes o sinal =, acumulamos 10 vezes o número 0.01 e 10 vezes 0.01 resulta em 0.1.

Atividade 19

a. 3,004 está mais próximo de 3 que de 4, pois se dividirmos o espaço de 3 a 4 (na reta numérica) em 1000 partes iguais, o 3,004 vai estar na 4ª marcação após o 3, o que é antes da metade do total das marcas.

b. 3,004 está mais próximo de 3 que de 3,01,

porque se dividirmos o espaço de 3 a 3,1 em 100 partes iguais, o 3,004 estará na 4ª marcação após o 3, o que é antes da metade do total de marcas.

c. 3,004 está mais próximo de 3 , porque se dividirmos o espaço de e a 3,01 em 10 partes iguais, o 3,004 estará na 4ª posição após o três, o que é antes da metade do total das marcas.

<pág. 52>

Atividade 20

Vamos tomar uma aproximação decimal para estes racionais? 17/3 é

aproximada-mente igual a 5,7 e 41/5 é aproximadamente igual a 8,2. Podemos então escrever os decimais 5,8; 5,9; 6; 6,1; 6,2; 6,3; 6,4; 6,5; 6,6 e 6,7, por exemplo. Há infinitas possibilidades de resposta, essa é apenas uma delas. O importante é que todos os números que você escrever estejam entre 5,7 e 8,2.

Atividade 21

Basta tomarmos uma aproximação decimal para cada um deles.

a. $\frac{23}{9}$; $\frac{17}{6}$; 3,6

b. 1,732;raiz quadrada de 3;1,733...

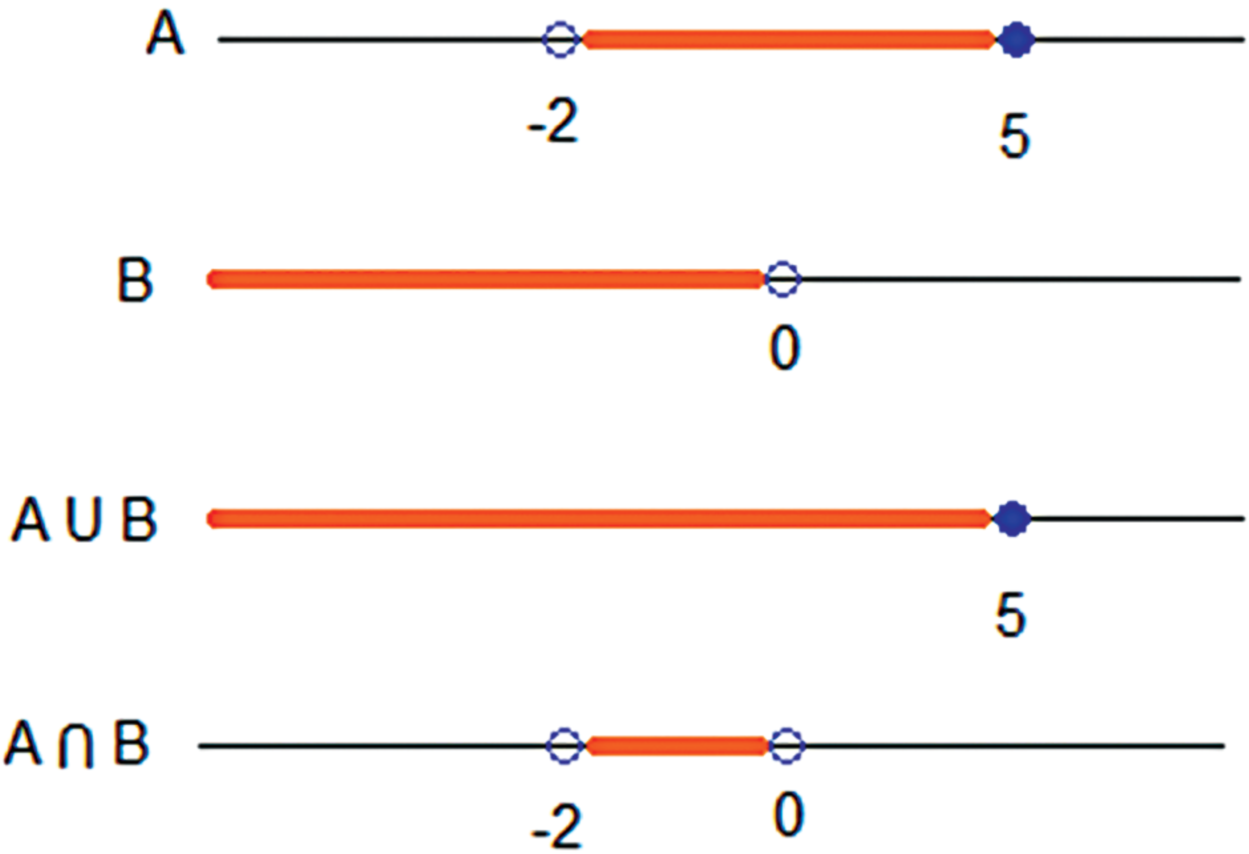
c. Menos raiz cúbica de oito; $-\frac{5}{12}$; raiz quadrada de 4

d. 4; 1,333...; 1,334; 1,4; $1\frac{3}{5}$

<pág. 53>

Atividade 22

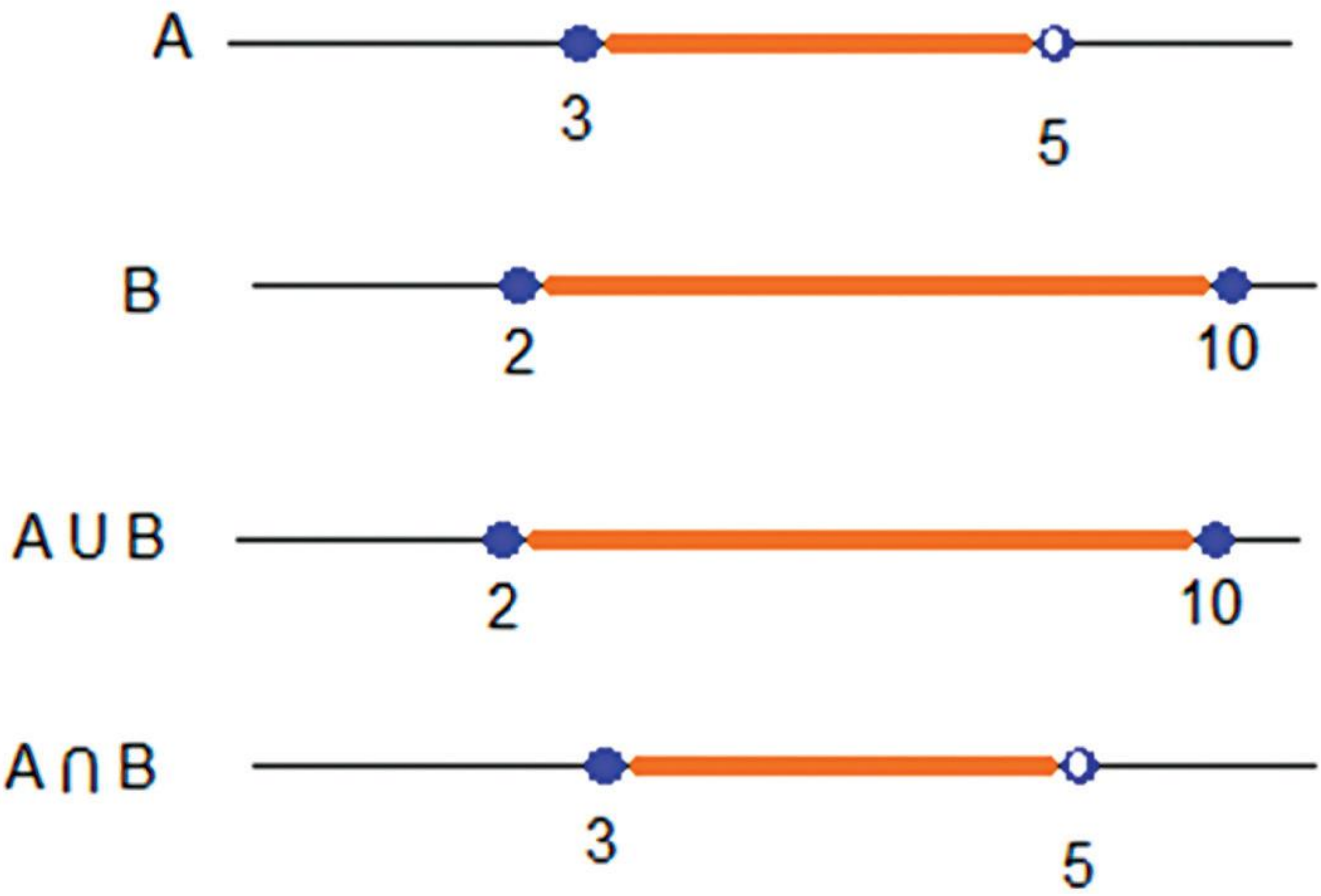
f. $A = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ -2 < x \leq 5\}$ e $B =]-\infty, 0[$



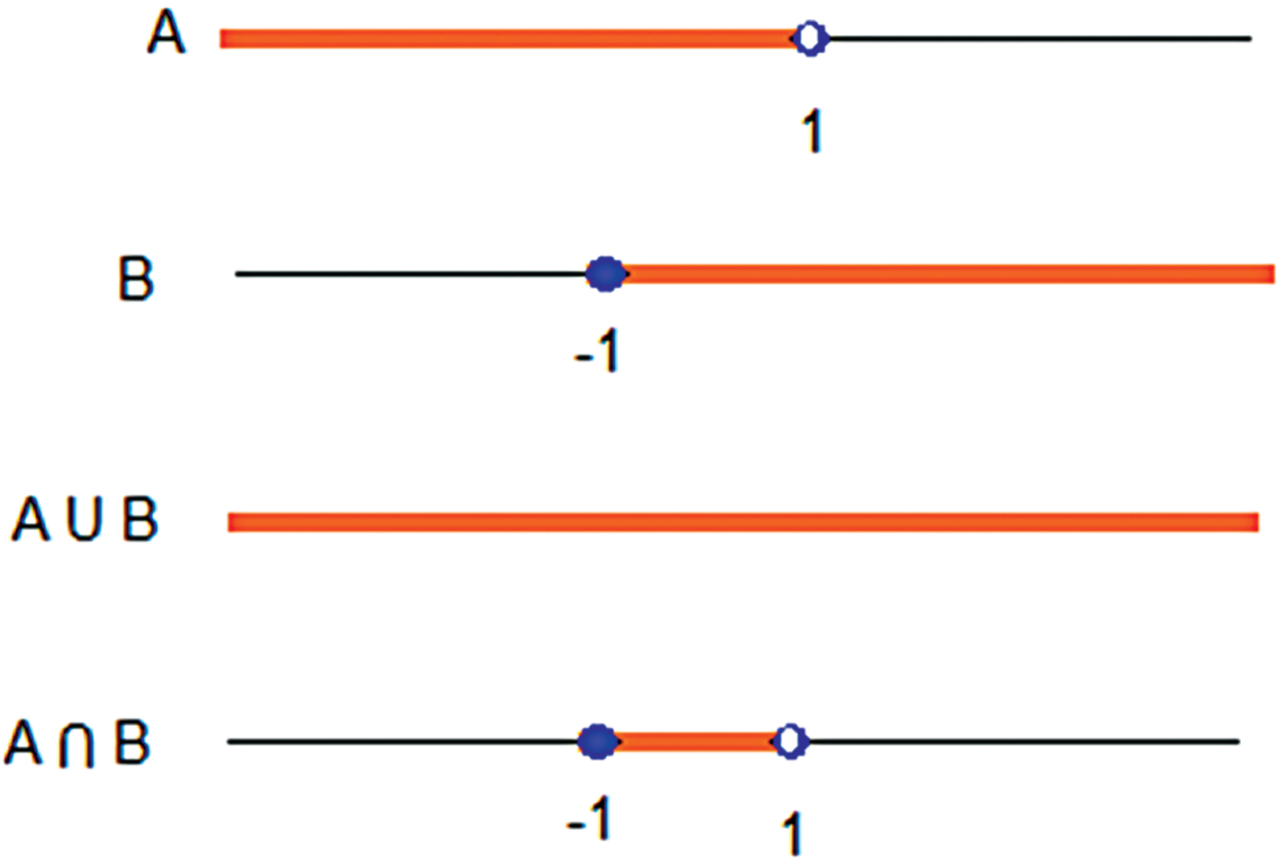
A ∪ B = { x ∈ ℝ / x ≤ -5} =]-∞, -5]

A ∩ B = { x ∈ ℝ / -2 < x < 0} =]-2, 0[

g. A = [3, 5[e B ={ x ∈ ℝ / 2 ≤ x ≤ 10}



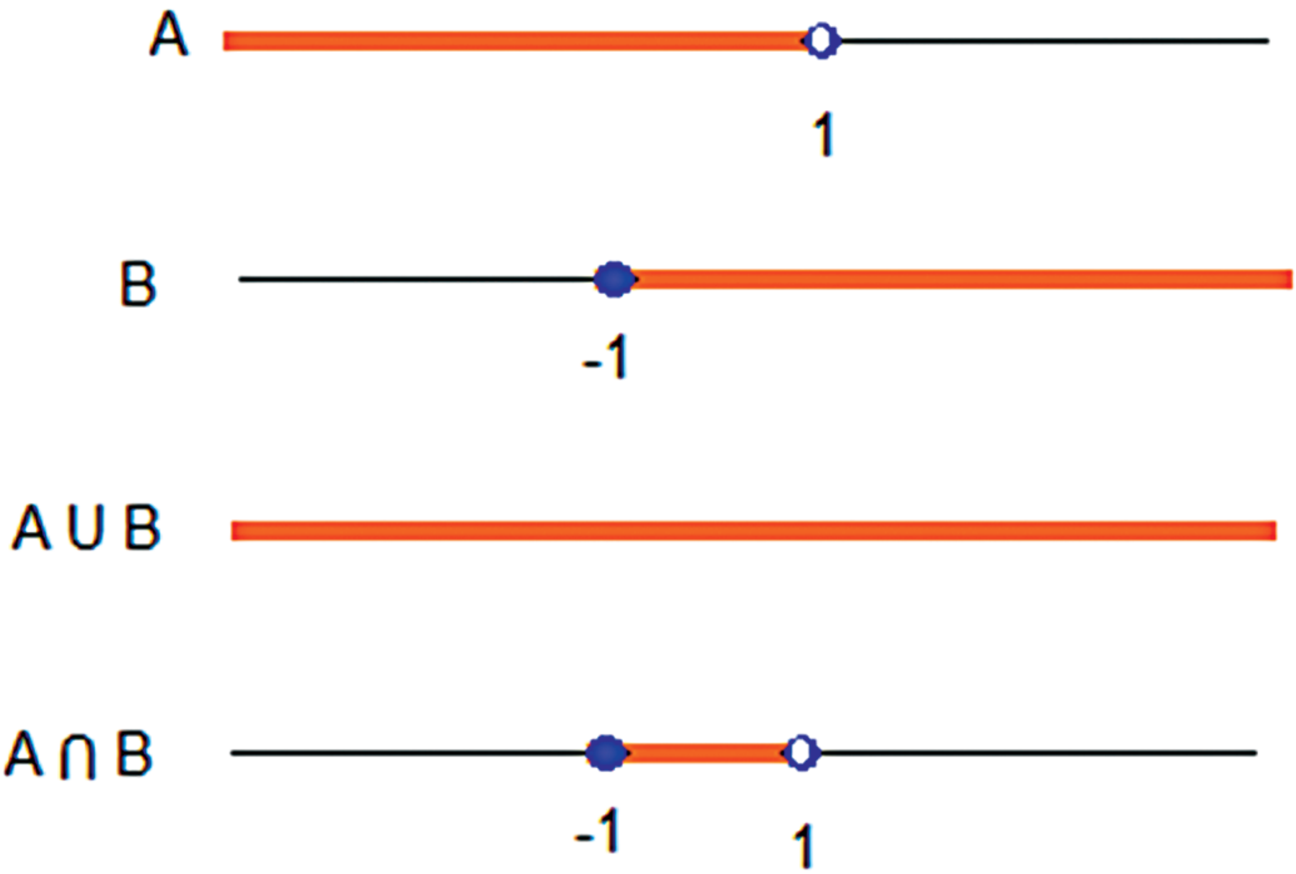
h. $= \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq -5\}$ e B= $[-6; 0[$



A $\cup$ B $= \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x < 0\} = \ ]-\infty, 0[$

A $\cap$ B $= \{ x \in \mathbb{R} \ / \ -6 \leq x < -5\} = \ ]-6, 5[$

i. $\mathbf{A =]-\infty, 1[}$ **e** $\mathbf{B = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq -1\}}$



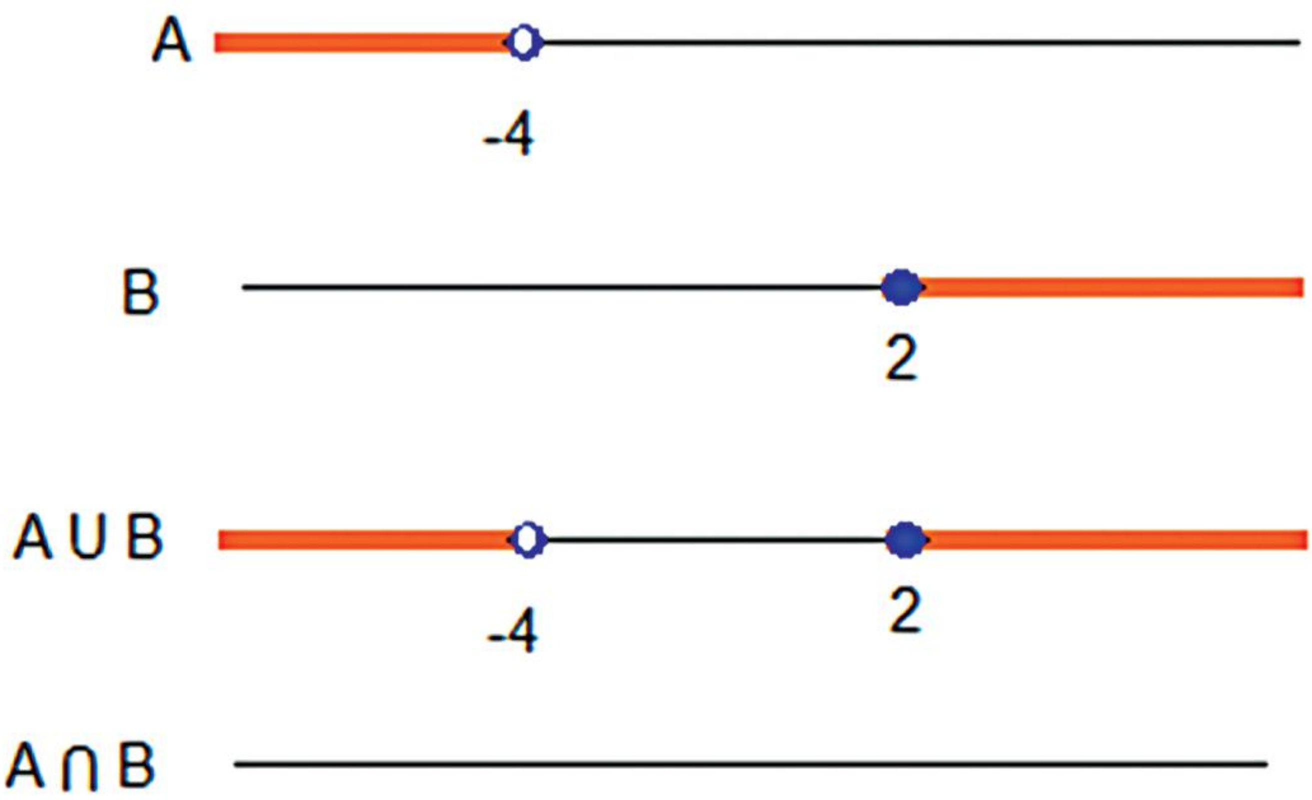
$\mathbf{A \cup B =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}}$

$\mathbf{A \cap B = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ -1 \leq x < 1\}}$

$\mathbf{= \{-1, 1[}$

<pág. 55>

j. $A = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x < 4\}$ e $B= [2; +\infty)$



$A \cup B =\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x < -4$ ou $x \geq 2\} =]-\infty, -4[\cup [2, +\infty[$

$A \cap B = \emptyset$

Unidade 12

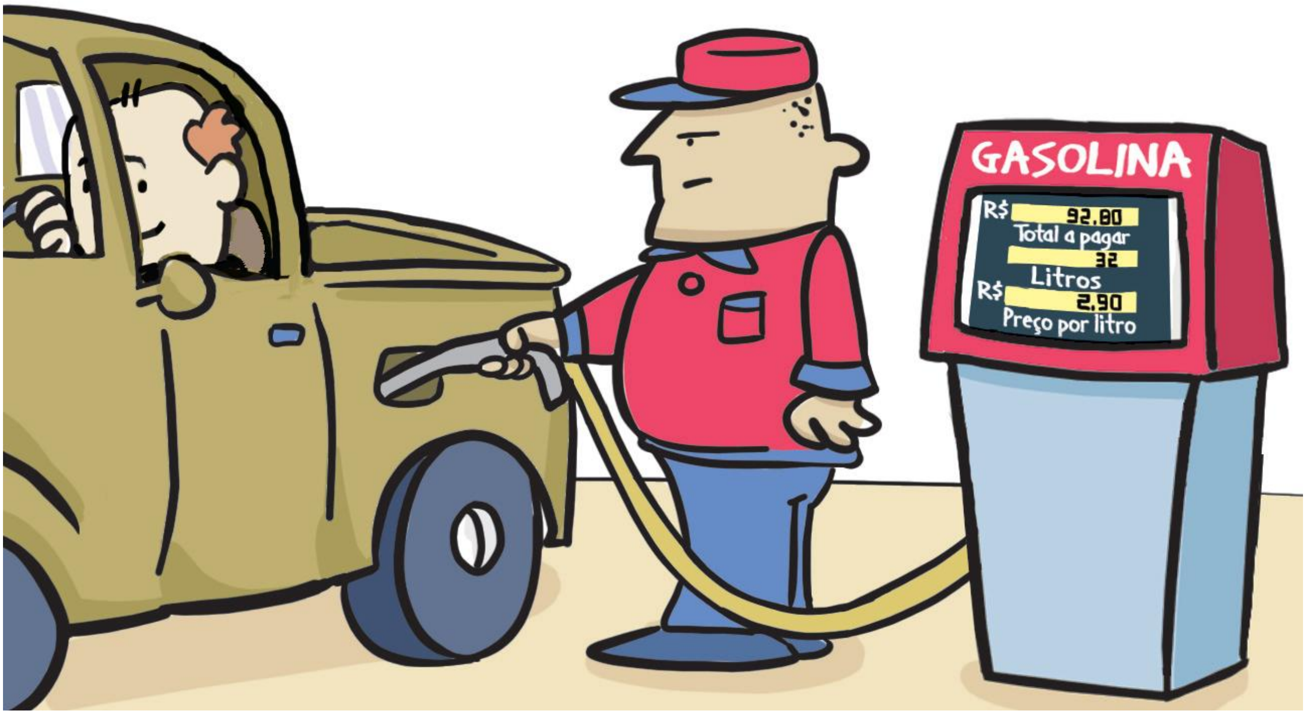
<pág. 57>

Estudo de funções – parte 1

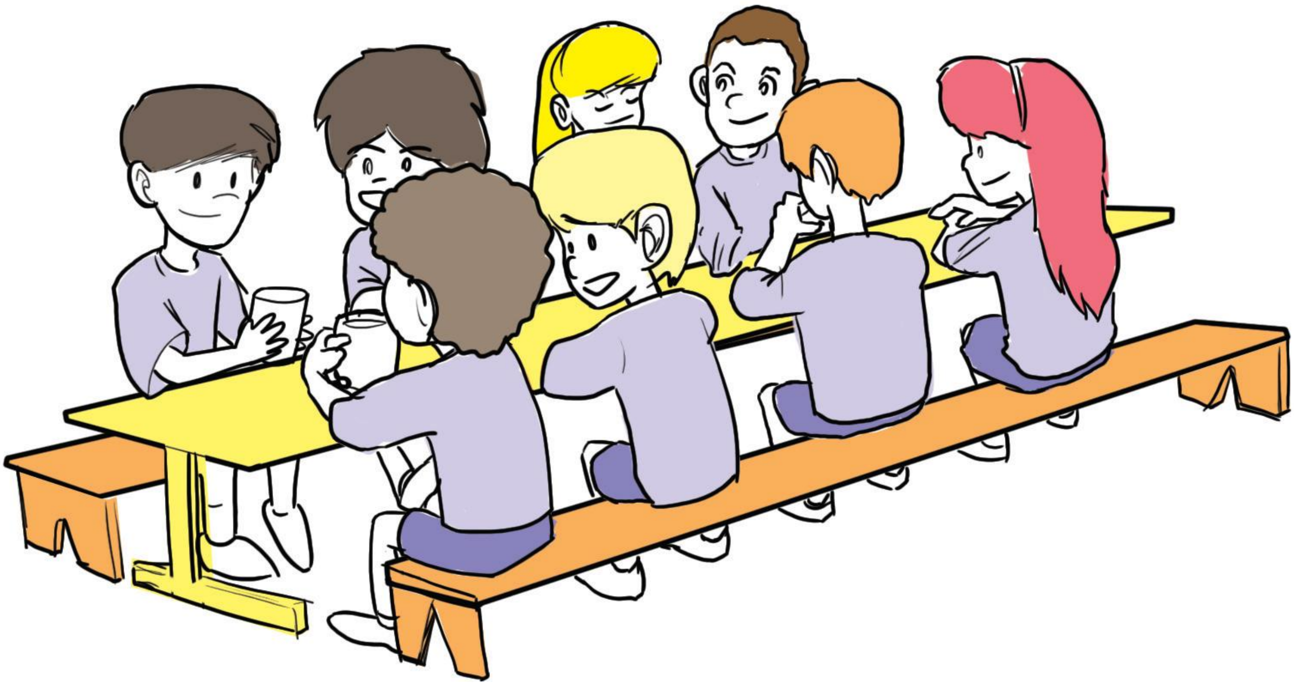
Para início de conversa...

A ideia de função é muito utilizada na Matemática e em outras áreas como Biologia, Física, Química, assim como em diferentes situações do nosso dia a dia.

Veja alguns exemplos:

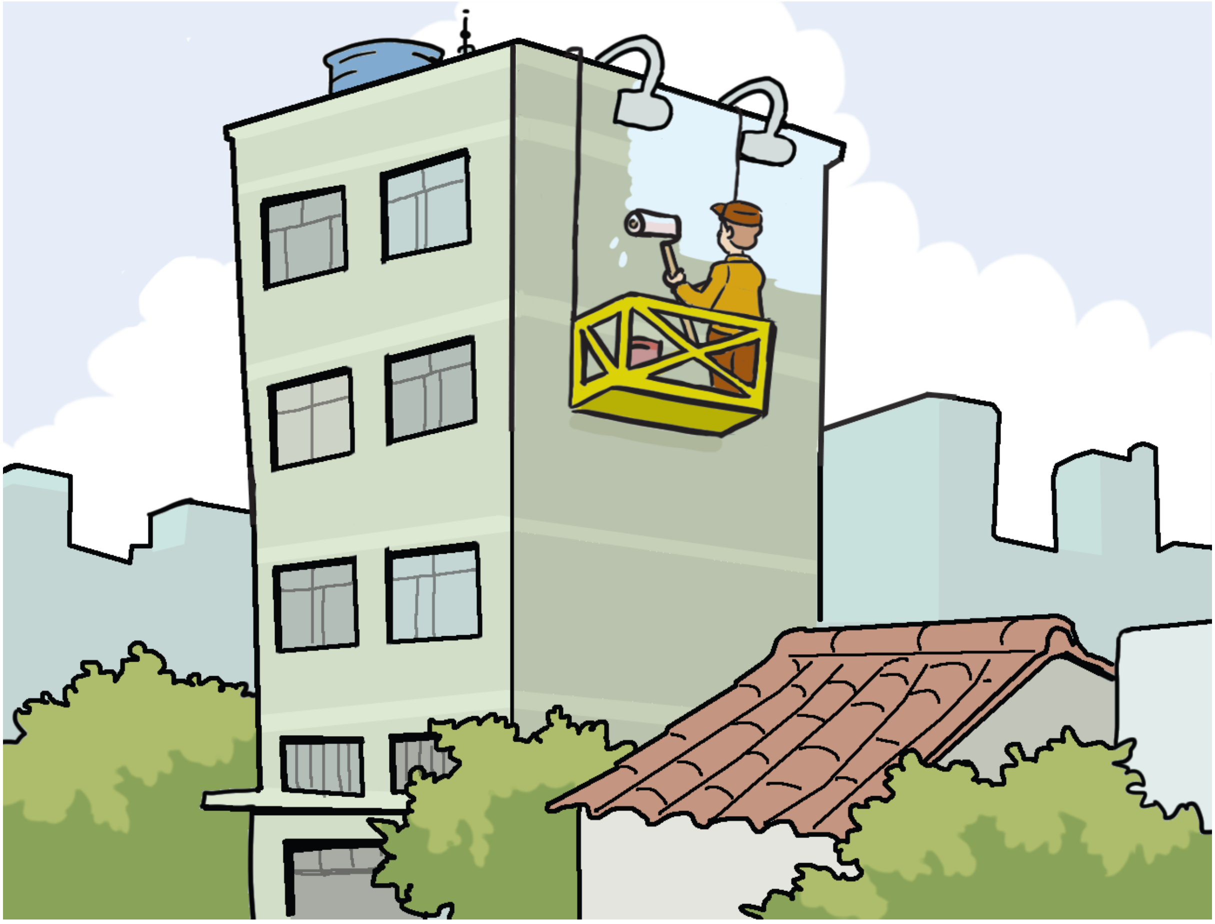


O preço a pagar depende da quantidade de gasolina colocada.



A quantidade de merenda depende da quantidade de crianças.

<pág. 58>



A quantidade de tinta consumida depende da área a ser pintada.

Em cada um destes exemplos foram destacadas duas grandezas que variam, de maneira que a variação

de uma depende da variação da outra.

Este fato é importante para a compreensão do conceito de função que vamos estudar a seguir.

Numa função há duas variáveis: a variável independente, que pode assumir qualquer valor em um conjunto determinado e a variável dependente, cujos valores são calculados a partir da 1ª variável.

Objetivos de aprendizagem

.Construir a ideia de função utilizando situações-problema da aritmética, geometria e álgebra.

.Reconhecer as noções de variáveis, dependência, regularidade.

.Escrever a expressão algébrica que representa uma relação entre duas grandezas que apresenta regularidade, ou seja, um padrão de comportamento..

.Reconhecer que, toda vez que duas grandezas variam proporcionalmente, a relação entre elas é uma função.

<pág. 59>

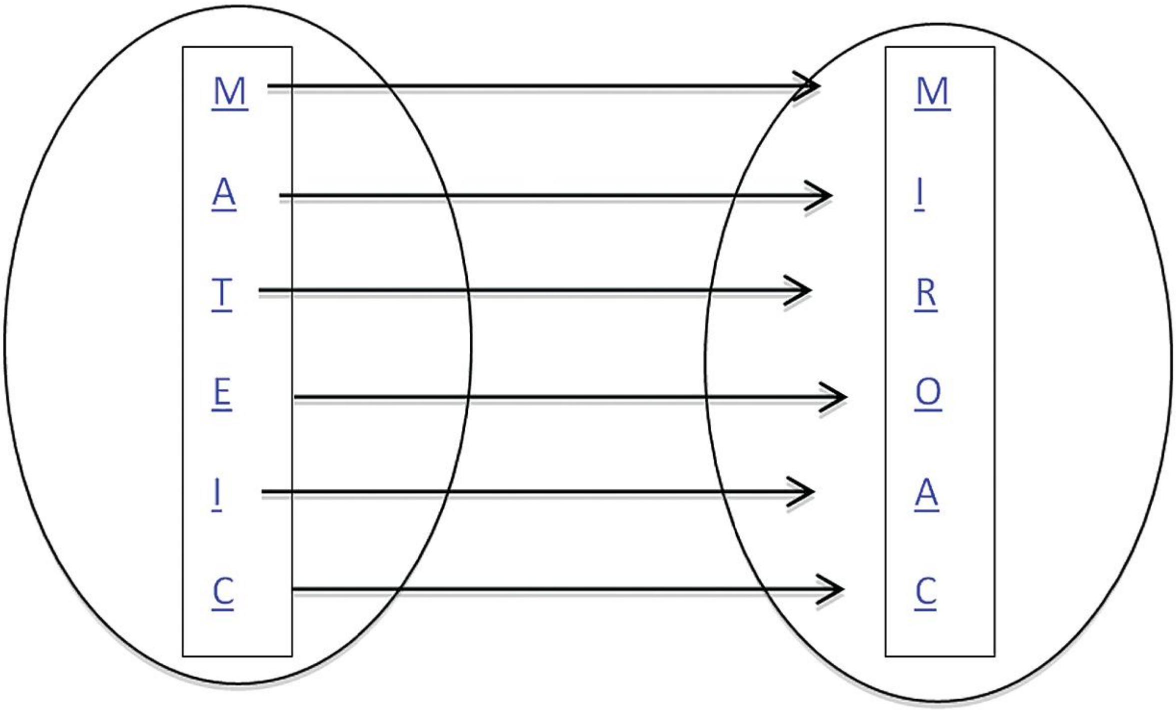
Seção 1
Relações e funções

No decorrer das guerras, os códigos para a transmissão de mensagens secretas foram fator importante nas conquistas de várias batalhas.

Um código muito conhecido é o chamado sistema "ZENIT-POLAR", que consiste, basicamente, em substituir as letras das palavras a serem cifradas de acordo com a regra estabelecida no nome do sistema: trocamos todos os

Zs por Ps– e vice versa, todos os Es por Os – e vice versa, todos os Ns por Ls – e vice-versa, e assim até o final. As letras que não constam do nome do sistema, como o M, J, K, etc permaneceriam inalteradas.

Baseado neste código, a querida Matemática resulta em uma criptografia transformada em Miromiraci. Lembrando a aula de teoria dos conjuntos, a gente poderia representar a transformação de Matemática em Miromiraci assim:

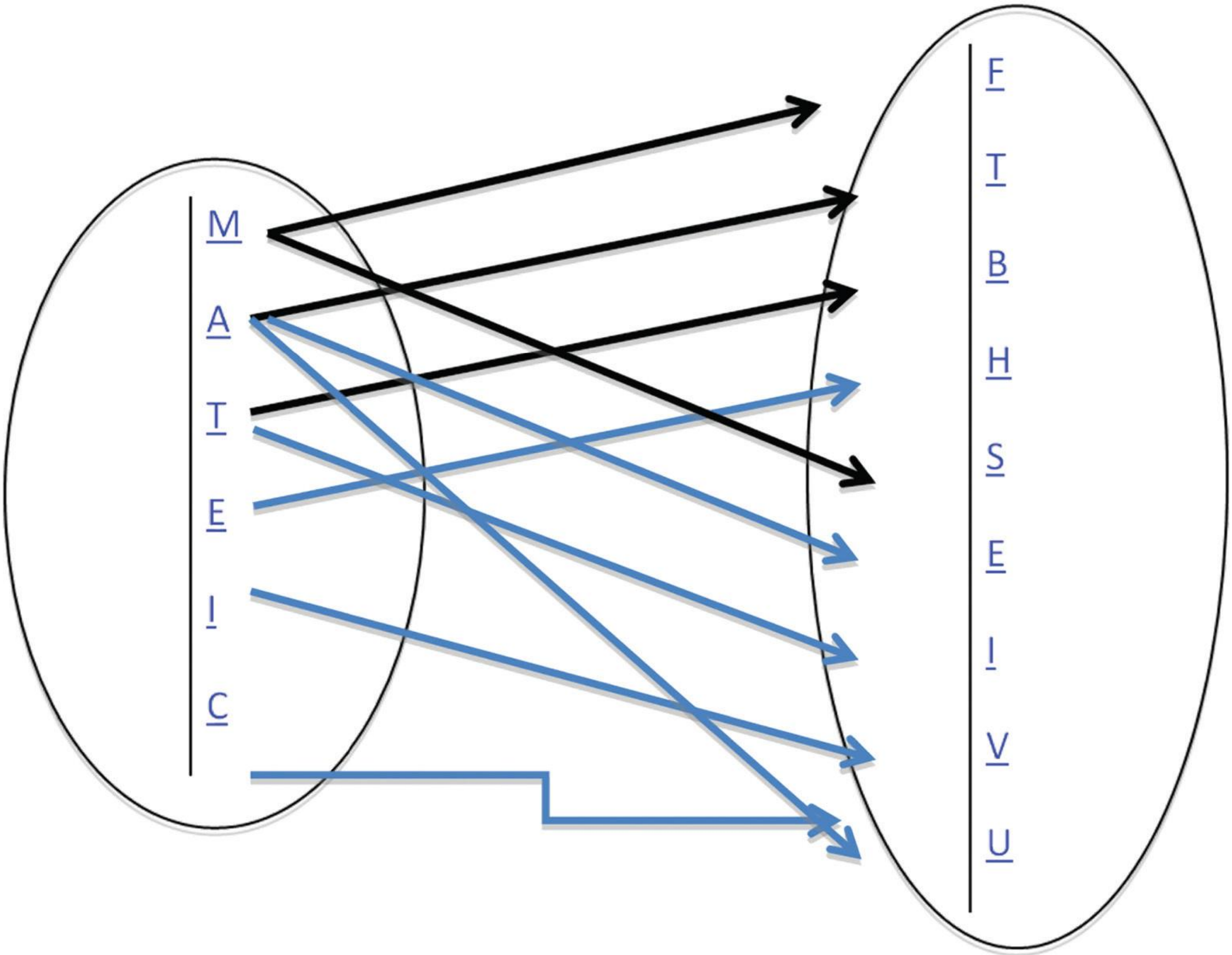


No conjunto à esquerda estão as letras da palavra matemática e no conjunto da direita as letras da palavra miromiraci. O sistema de criptografia Zenit-Polar faria justamente essa ponte, estabeleceria essa relação entre os elementos de um conjunto e os de outro.

Durante a Segunda Guerra Mundial, os militares alemães, por exemplo, usavam uma sofisticada máquina chamada Enigma para encriptar suas mensagens. A máquina continha até oito tambores articulados e que se moviam durante a digitação – o que, muito grosso modo, fazia com que a tabela de correspondência mudasse a cada letra digitada. Assim, uma palavra seria codificada de uma quantidade gigantesca de maneiras diferentes, mesmo quando digitada repetidas vezes numa mesma mensagem!

Quer experimentar? Dê um pulo em http://enigmaco.de/enigma / enigma.html, para acessar a versão online da máquina Enigma de três tambores. Foi nessa mesma máquina que entramos com a palavra matemática e obtivemos ftbhseivvu. Vamos representar essa relação no diagrama?

<pág. 60>



E aqui, apontamos uma diferença significativa entre essa relação e anterior: enquanto na relação do Zenit-Polar cada elemento do conjunto da esquerda estava relacionado a um

único elemento do conjunto da direita, na relação da máquina Enigma há elementos do conjunto da esquerda que estão associados a mais de um elemento do conjunto da direita: o M está associado a dois elementos (o F e o S), o A está associado a três elementos (o T, o E e o U) e o T está associado dois elementos (o B e o I). Por isso, repetindo, quando cada elemento do conjunto da esquerda está associado a um único elemento do conjunto da direita, como no primeiro caso, dizemos que a relação do Zenit- Polar é

uma função. E, como na relação da Enigma há pelo menos um elemento do conjunto da esquerda associado a mais de um elemento do conjunto da direita, dizemos que essa relação não é uma função. Veja: a relação existe – tanto que a mensagem podia ser decodificada – e é determinada pela combinação das inúmeras chaves e tambores da máquina. Ela só não é uma função.

Seção 2
Mais sobre a noção de função

Exemplos de funções

Na seção anterior você observou exemplos de relações entre dois conjuntos. No exemplo do sistema criptográfico Zenit-Polar, a relação estabelece uma correspondência entre os elementos dos dois conjuntos de letras em que a cada letra do 1º conjunto corresponde apenas a uma letra no 2º conjunto. Esta relação é uma função. Já no outro sistema criptográfico, mais complexo, isto não acontece. Nesse caso a relação não é uma função.

<pág. 61>

Vamos apresentar agora alguns exemplos de funções determinando, quando possível, a expressão matemática que representa cada uma. No entanto, é preciso ter em mente que para determinar a expressão Matemática é necessário identificar o padrão de comportamento ou regularidade.

1º) Um litro de gasolina está custando R$ 2,83 em um posto de combustível da minha cidade.Veja a tabela

que mostra os valores a pagar para se colocar gasolina no tanque de um carro.

Litros	1	2	3	4
Preço a pagar (R$)	2,83	5,66	8,49	11,32

Litros	5	6	...	30
Preço a pagar (R$)	14,15	17,98	...	84,90

O que mostra essa tabela?

O preço (VARIÁVEL DEPENDENTE) a pagar depende da quantidade de litros de gasolina (VARIÁVEL INDEPENDENTE) que forem colocados no tanque, ou seja, o preço será igual à quantidade de litros multiplicada pelo preço de 1 litro de gasolina que é R$ 2,83. Neste caso, dizemos que o preço a pagar é função da quantidade de litros colocados no tanque. Será que você consegue escrever uma expressão matemática que represente essa função?

2º) Um professor resolveu brincar com a turma de

“adivinhe a regra”. Ele dizia um número para um aluno e ele respondia outro número de acordo com uma regra previamente combinada. Vamos adivinhar qual é essa regra?

Veja a tabela com alguns números escolhidos pelo professor e os números que o aluno respondeu.

Número escolhido	**1**	**3**	**4**	**6**	**8**
Número respondido	**1**	**5**	**7**	**11**	**15**

Conseguiu descobrir a regra? Parabéns! Mas se não

conseguiu, não tem problema, vamos contar para você: os números respondidos pelo colega são iguais ao dobro do número escolhido pelo professor menos 1. Neste caso, também dizemos que o número respondido é função do número escolhido. Será que você consegue escrever uma expressão matemática que represente essa função? Veja nossa resposta logo depois do terceiro exemplo.

3º) Na bula de um remédio pediátrico está indicado a posologia (modo de usar) da seguinte maneira: ***2 gotas a cada kg de peso***

Peso em kg (P)	1	2	3	4	5
Nº. de gotas (G)	2	4	6	8	10

Peso em kg (P)	6	7	8	9
Nº. de gotas (G)	12	14	16	18

<pág. 62>

O número de gotas de remédio (VARIÁVEL DEPENDENTE) a serem administradas, depende do peso da criança (VARIÁVEL INDEPENDENTE) e podemos escrever a seguinte expressão matemática: G = 2 P.

Dizemos que G é função de P.

Vamos ver agora como ficam as expressões matemáticas dos outros exemplos.

No caso do exemplo 1, se representarmos por P o

valor a ser pago e por L a quantidade de litros colocados, podemos escrever que $P = 2{,}83 \times L$. Como o preço a pagar é função da quantidade de litros colocados no tanque,dizemos que P é função de L.

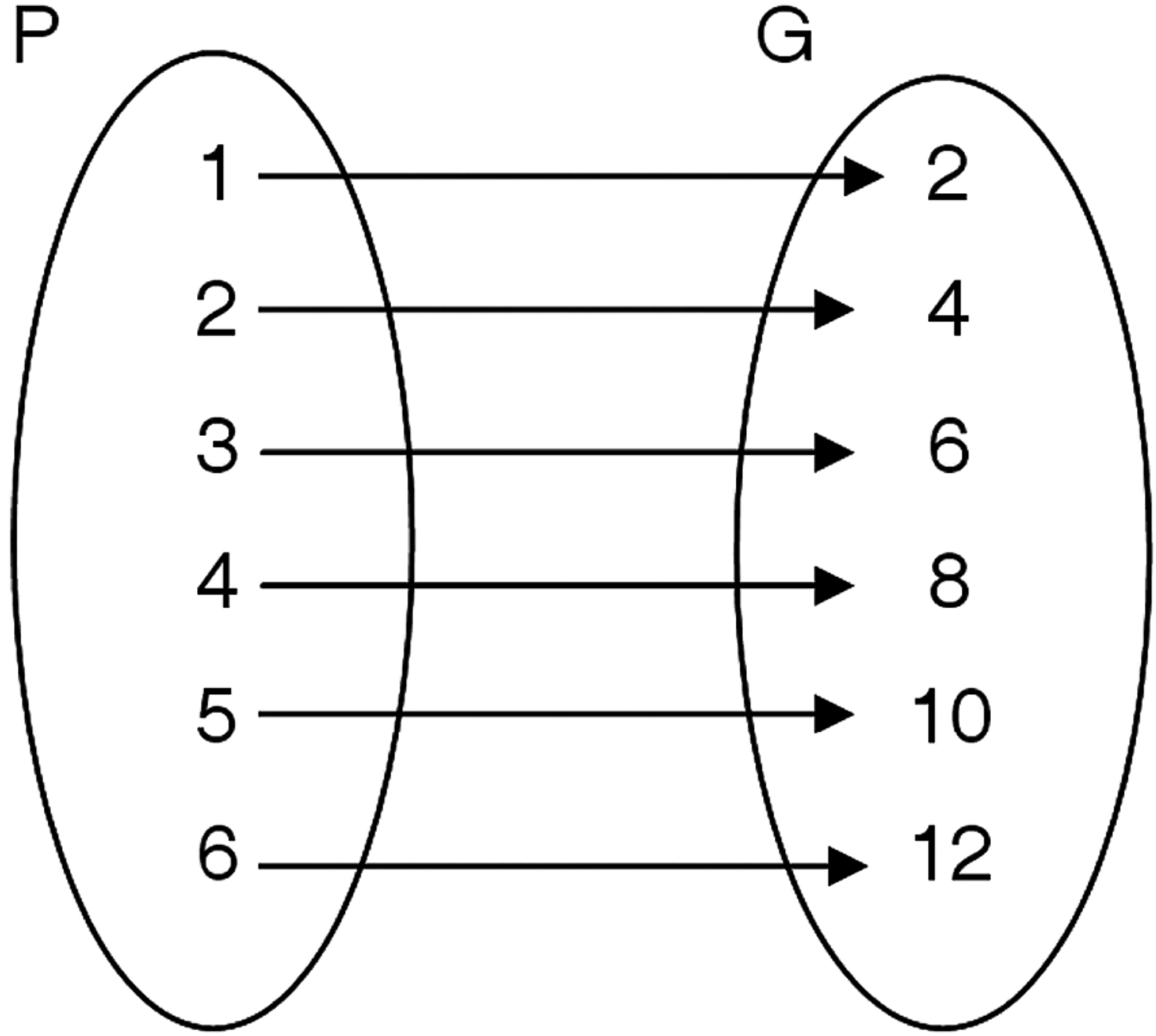
No exemplo 2, se chamarmos de R o número respondido pelo aluno e n é o número escolhido pelo professor, podemos dizer que a expressão que representa essa regra é: $R = 2n - 1$. Como o número respondido é função do número escolhido, dizemos que R é função de n.

Representação de uma função por diagrama

Além da representação por tabela, podemos também representar uma função por diagramas usando conjuntos e flechas para indicar a relação de correspondência entre as grandezas.

1º) Veja a representação da função do 3º exemplo.

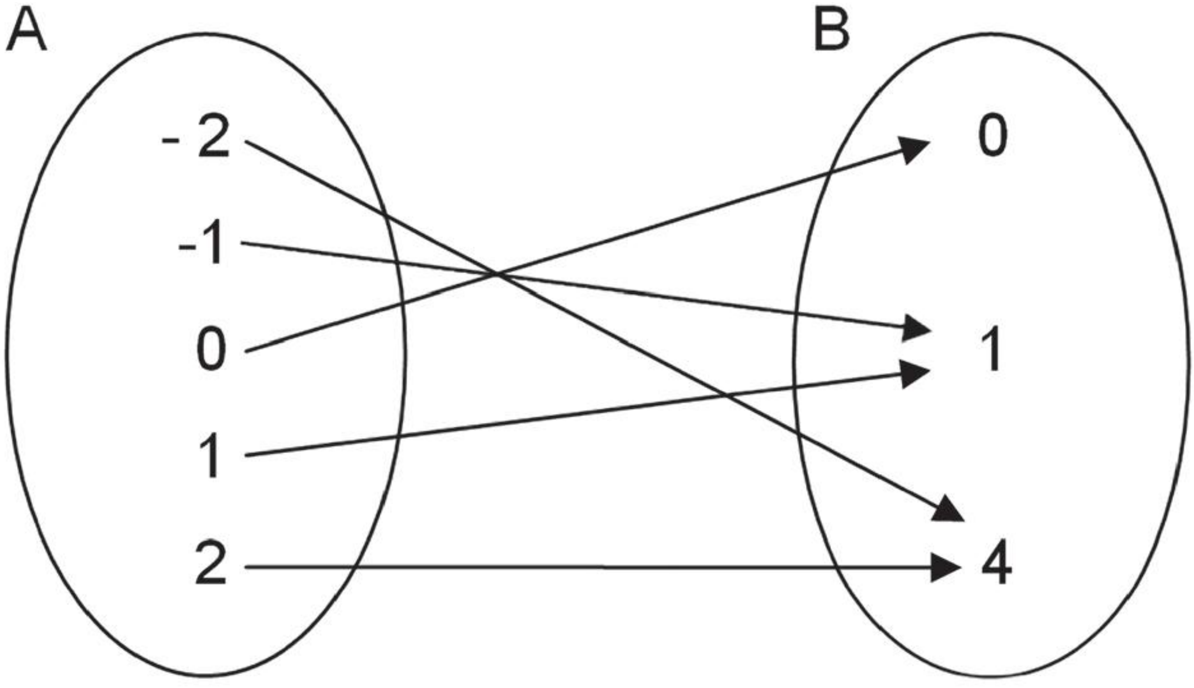
Chamamos de P o conjunto de alguns valores que indicam os pesos e G o conjunto dos valores que indicam a quantidade de gotas correspondentes.



Podemos observar que a cada valor que indica o peso, corresponde um único valor que indica a quantidade de gotas do remédio

2º) Temos A = {-2, -1, 0,1,2} e B = {0, 1 4} e a expressão matemática que representa essa correspondência é y = x2, onde x é elemento de A e y é elemento de B.

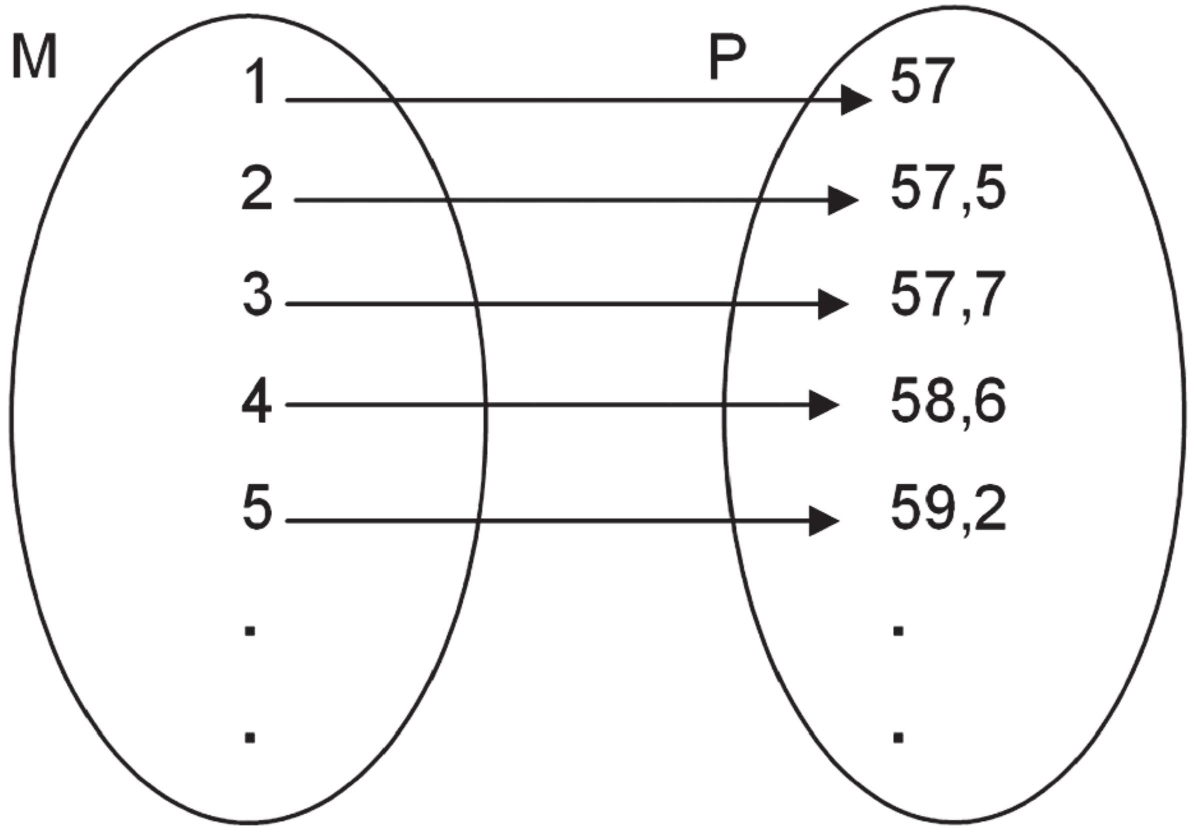
<pág. 63>



Neste diagrama, vemos que cada valor do conjunto A tem um único valor correspondente no conjunto

B, portanto o diagrama está representando uma função de A em B.

3º) Observe o diagrama que mostra a relação entre tempo de gravidez M (em meses) e o peso de uma gestante P (em kg).



O peso da gestante é função do tempo de estação,

pois a cada mês a gestante terá apenas um peso. No entanto, neste caso não é possível determinar uma expressão matemática para indicar esta dependência. Além da variação do peso não seguir nenhum padrão, ela também muda de acordo com a gestante.

(Texto no interior do balão: Atenção! Nos três exemplos, podemos ver que de cada elemento do 1º. conjunto, sai apenas uma seta para algum elemento do 2º. Conjunto. Esse fato caracteriza que o diagrama representa uma função.)

<pág. 64>

Situação Problema 1

Manuel e Solange resolveram brincar de “adivinhe a regra”. Solange dizia um número e Manuel respondia outro. O objetivo do jogo é, depois de alguns

exemplos, descobrir qual regra Manuel estava aplicando. Para ajudar a descobrir, Solange construiu uma tabela com os números que ela disse em uma coluna e o número que Manuel respondeu, em cada caso, em outra coluna. Veja como ficou a tabela:

Número dito por Solange (s)	Número respondido por Manuel (m)
0	-1
2	3
-1	-3
1	1
4	7

a. Descubra a regra que Manuel usou.

b. O número respondido por Manuel depende do número dito por Solange?

c. Podemos dizer que o número respondido por

Manuel (m) é função do número dito por Solange(s)? Por quê?

Situação Problema 2

Uma pessoa está dirigindo em uma estrada, com uma velocidade constante de 80km/h.

a. Construa uma tabela usando t para representar o tempo (em horas) que a pessoa dirigiu, e d para representar a distância percorrida (em km).

b. Existe uma função entre essas duas grandezas? Por quê?

c. Escreva a sentença matemática que representa essa função.

Situação Problema 3

Temos A = { 0, 1, 4, 9} e B = { 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3} e a expressão matemática que representa uma correspondência entre A e B é $y = \sqrt{x}$, onde x é elemento de A e y é elemento de B.

<pág. 66>

Faça um diagrama que represente essa correspondência e verifique

se ela é uma função de A em B, justificando a resposta. Todos os elementos de B recebem flechas vindas de A?

Importante
Raiz quadrada de um número real não negativo (x) é um valor também real e não negativo que, se multiplicado por si mesmo, é igual a x. Por exemplo: A raiz quadrada de 9 é 3, porque 3 . 3 = 9. Observe que definimos a raiz quadrada de um número real não negativo como sendo um número real não negativo. Portanto, mesmo sabendo que (- 3) . (- 3) =

9, não podemos dizer que –3 também seja uma raiz quadrada de 9.

****

Situação Problema 4

Em um estacionamento, são cobradas as seguintes tarifas:

1 hora: R$3,00

Após a 1ª hora: R$2,00 por hora excedente.

a. Faça uma tabela apresentando o número de horas que um carro permaneceu no estacionamento (h) e o valor a pagar em reais(r).

b. O valor a pagar é função do número de horas que o carro permanecerá no estacionamento? Explique.

c. Escreva uma expressão matemática que represente o valor a pagar.

Notação de uma função

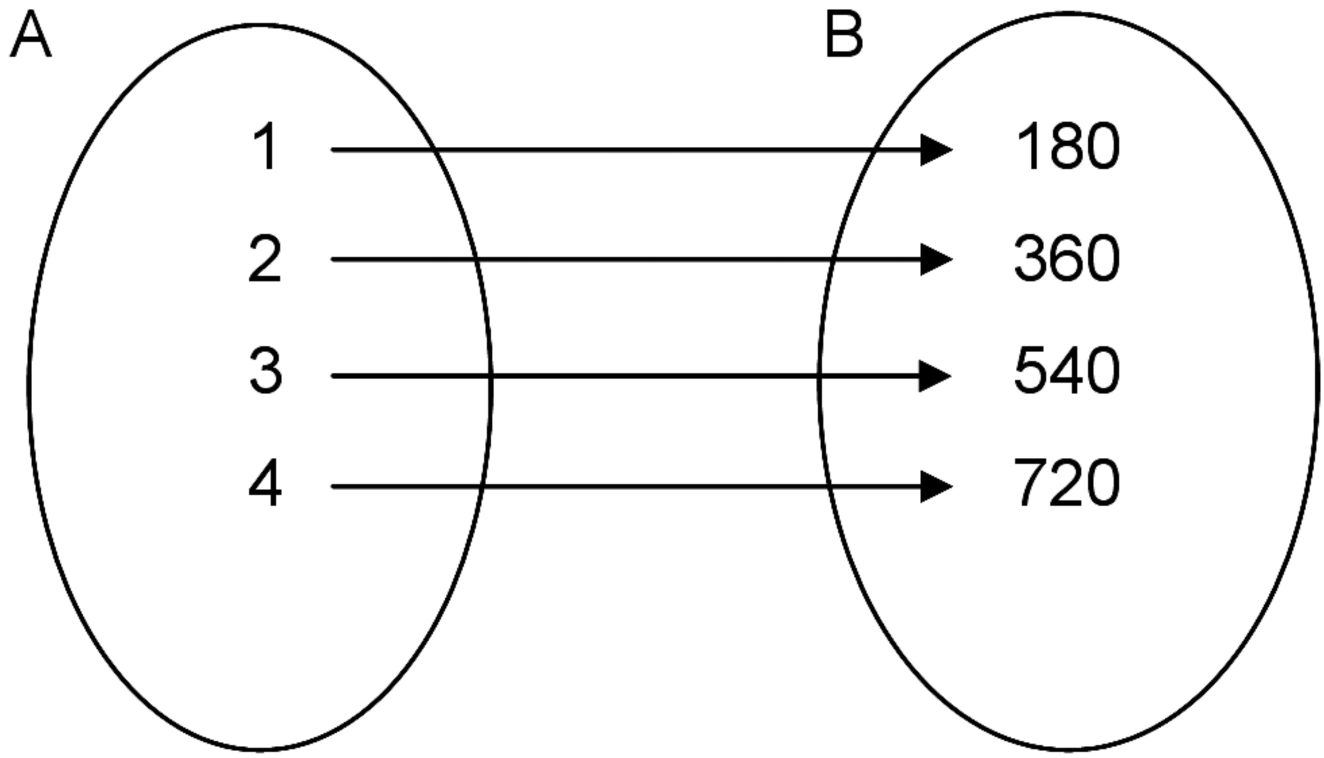
Como já foi visto nos exemplos anteriores, usamos letras para representar grandezas variáveis. Também já vimos que numa função há duas variáveis: a variável independente, que pode assumir qualquer valor em um conjunto determinado e a variável dependente, cujos

valores são calculados a partir da 1ª variável.

Veja o seguinte exemplo:

O valor que um pintor vai cobrar para pintar as casas de um conjunto habitacional vai depender do número de cômodos da casa. Para cada cômodo ele cobrará R$ 180,00. Usando a representação com conjuntos e setas que vimos anteriormente, chegamos no diagrama a seguir:

<pág. 66>



Como o preço do trabalho depende do número de cômodos a serem pintados, podemos dizer que a variável preço é dependente da variável número de cômodos. Assim, a variável preço seria a variável dependente e o número de cômodos a variável

independente. Matematicamente falando, se representarmos o número de cômodos pela variável x e o preço do trabalho pela variável y, a variável x será a variável independente, a variável y será a variável dependente.

y = f(x), que se lê: y é função de x

Se lembrarmos que todos os valores do número de cômodos – a variável x, ok? – são elementos do conjunto A e que todos os preços – a variável y – são elementos de B, podemos escrever, ainda, que:

$$f: A \longrightarrow B$$
$$y = 180.x$$

Ou, em linguagem corrente, f é uma função definida de A em B, representada pela expressão

$$y = 180.x \text{ ou ainda}$$
$$f(x) = 180.x$$

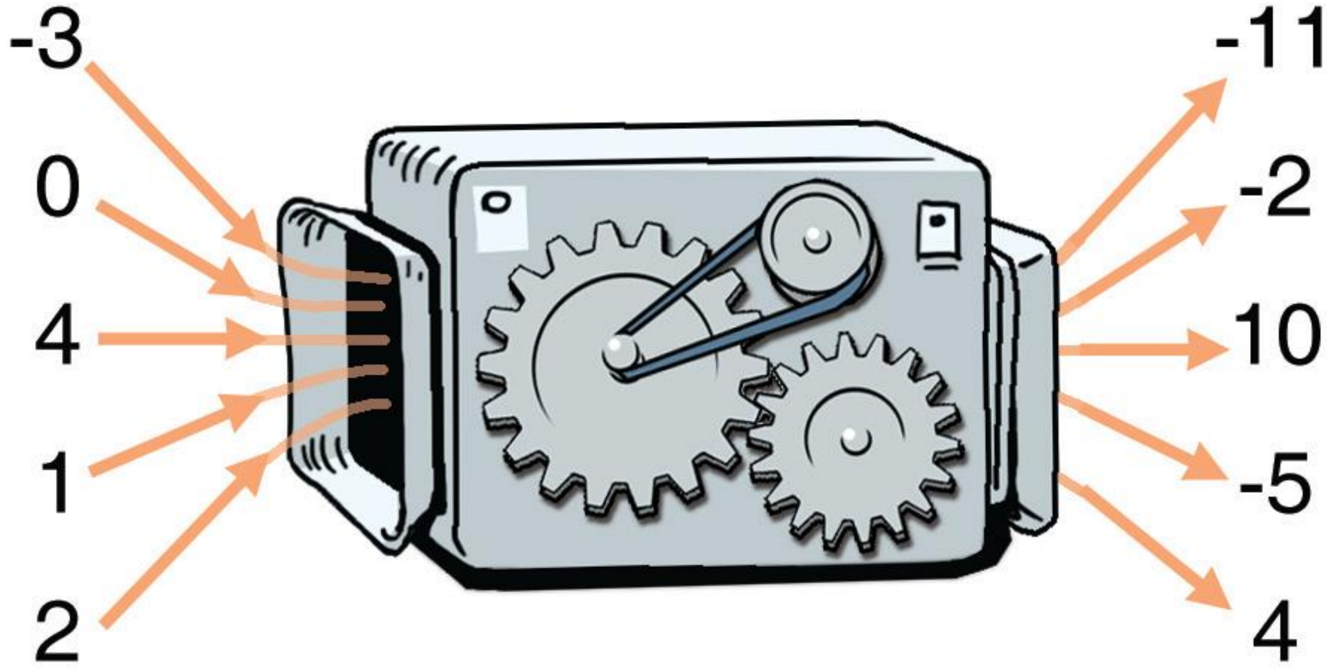
Domínio e Imagem

No exemplo anterior, o conjunto A cujos elementos são os números de cômodos de cada casa é chamado Domínio da função(D) e o conjunto B cujos elementos são os valores da pintura é

chamado Imagem da função (Im).

Exemplo:

Veja a “máquina de números” que faz o seguinte: para cada número que entra na máquina, ela triplica e subtrai 2 do resultado. A cada número que entra, sai apenas um número da máquina, portanto essa relação obtida pela máquina é uma função.



<pág. 67>

A função dessa máquina é representada pela expressão y = 3x -2, sendo y o número que sai da máquina e x é o número que entra.

O domínio dessa função é D = {-3, 0, 4, -1,2} e a

Imagem é Im= {-11, -2, 10, -5, 4}

Atividade

O salário mensal de um vendedor é composto de duas partes: uma é fixa no valor de R$ 700,00 e a outra é variável sendo igual a 1% do total que ele vende no mês.

Chamando de v o total de vendas e de s o salário final do vendedor, podemos escrever que s = f(v) é a função que associa o total de vendas com o salário do vendedor.

Escreva a expressão algébrica que representa essa situação.

Importante

Lembre-se que para calcular 1% de uma quantia basta dividi-la por 100 ou ainda multiplicá-la por 0,01.

******

Desafio 1:

Se aquele vendedor recebeu de salário R$ 735,20, quanto vendeu neste mês?

******

Proporcionalidade e função

A proporcionalidade é um exemplo importante de função matemática que está presente no dia a dia das pessoas em diferentes situações, tais como:

.Determinar o preço de 6 lápis conhecendo o preço de 1 lápis.

.Calcular a quantidade de carne necessária para um churrasco sabendo-se que, em média, cada convidado come 200g de carne.

.Determinar o preço de um imóvel em certa região, conhecendo o preço de 1m2 de construção naquele local.

Exemplos:

1º) Em locais onde se faz cópias xerox, é comum haver uma tabela, para facilitar o trabalho, que relaciona o número de cópias tiradas com o total a pagar.

Número de cópias	Total a pagar
1	0,25
2	0,50
3	0,75
4	1,00
5	1,25
...	...

Observando a tabela, vemos que quando multiplicamos por 2 o número de cópias, o total a pagar também fica multiplicado por 2; e quando multiplicamos por 3 o número de cópias, o total a pagar também fica multiplicado por 3, e assim por diante. Portanto, podemos concluir que o valor a pagar é diretamente proporcional ao número de cópias tiradas.

Por outro lado, o valor a pagar é função da quantidade de cópias tiradas, pois a cada quantidade de cópias há apenas um valor a pagar.

Considerando x a quantidade de cópias tiradas e y o valor a pagar, podemos escrever:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{0,25} = \frac{2}{0,50} = \frac{3}{0,75} = \frac{4}{1} = \ldots$$

Logo, a expressão matemática que representa esta função é

$$y = 0,25 \cdot x$$

2º) Para fazer um passeio à uma cidade histórica um grupo de amigos resolveu alugar um ônibus. A despesa será rateada entre os participantes do passeio, de acordo com a tabela a seguir:

Número de participantes	Quantia a pagar (R$)
10	54,00
36	15,00
20	27,00
25	21,60
30	18,00
18	30,00

Observando a tabela, vemos que ao multiplicar por 2 o número de participantes, por exemplo 10 × 2 = 20, a quantia correspondente fica dividida por 2 (54 ÷ 2 = 27). Neste caso, a quantia a pagar é inversamente proporcional

ao número de participantes do passeio.

Por outro lado, a quantia a pagar é função do número de participantes e a expressão que representa esta função pode ser escrita assim:

$Y = \frac{540}{x}$, onde *x* é o número de participantes e *y* é a quantia a pagar.

Importante

Sempre que duas grandezas são proporcionais, DIRETAMENTE OU INVERSAMENTE, existe uma função entre elas. No

entanto, nem toda função é uma proporção, pois as grandezas podem aumentar ou diminuir ao mesmo tempo sem que haja uma proporcionalidade entre seus valores.

****

Desafio 2:

1. Dê um exemplo de uma função entre duas grandezas sem que essas grandezas sejam proporcionais. Pode utilizar uma tabela ou um diagrama.

Uma companhia telefônica oferece aos consumidores dois tipos de contrato:

1º tipo: Assinatura mensal: R$ 45,00

Tarifa por minuto: R$ 0,38

2º tipo: Assinatura mensal: isenta

Tarifa por minuto: R$ 1,80

<pág. 69>

Responda:

a. Quais são as sentenças matemáticas que expressam o total a ser pago no final do mês em cada um dos dois tipos de contrato?

b. As opções de contrato apresentam

proporcionalidade entre as grandezas envolvidas? Justifique.

2. Um carro consome 1 litro de combustível em média a cada 9km.

a. Faça uma tabela relacionando as grandezas distância (D) em km e consumo (L) em litros.

b. O consumo do carro é função da distância percorrida? Por quê?

c. O consumo do carro é proporcional à distância percorrida? Explique.

d. Escreva uma expressão matemática que represente a relação entre o consumo

do carro e a distância percorrida pelo carro.

Importante

O consumo de um carro é medido pelo numero de quilômetros que ele percorre gastando 1 litro de combustível. Este consumo depende, entre outros fatores, da velocidade com que ele anda.

****

3. Um pintor foi contratado para pintar uma parede cuja área é de 240m2.

A tabela a seguir mostra o quanto ainda falta ser pintado no final de cada dia.

Dia	Área a ser pintada (m^2)
0	240
1	200
2	150
3	120
4	60
5	60:
6	30
7	0

Responda:

a. A área (y) da parede a ser pintada é função do dia (x)?

b. Quando o valor de x (dia) cresce o que acontece com o valor de y (área a ser pintada)?

c. A relação entre a área a ser pintada e o dia trabalhado apresenta proporcionalidade? Por quê?

d. Quantos dias o pintor levou para terminar o serviço?

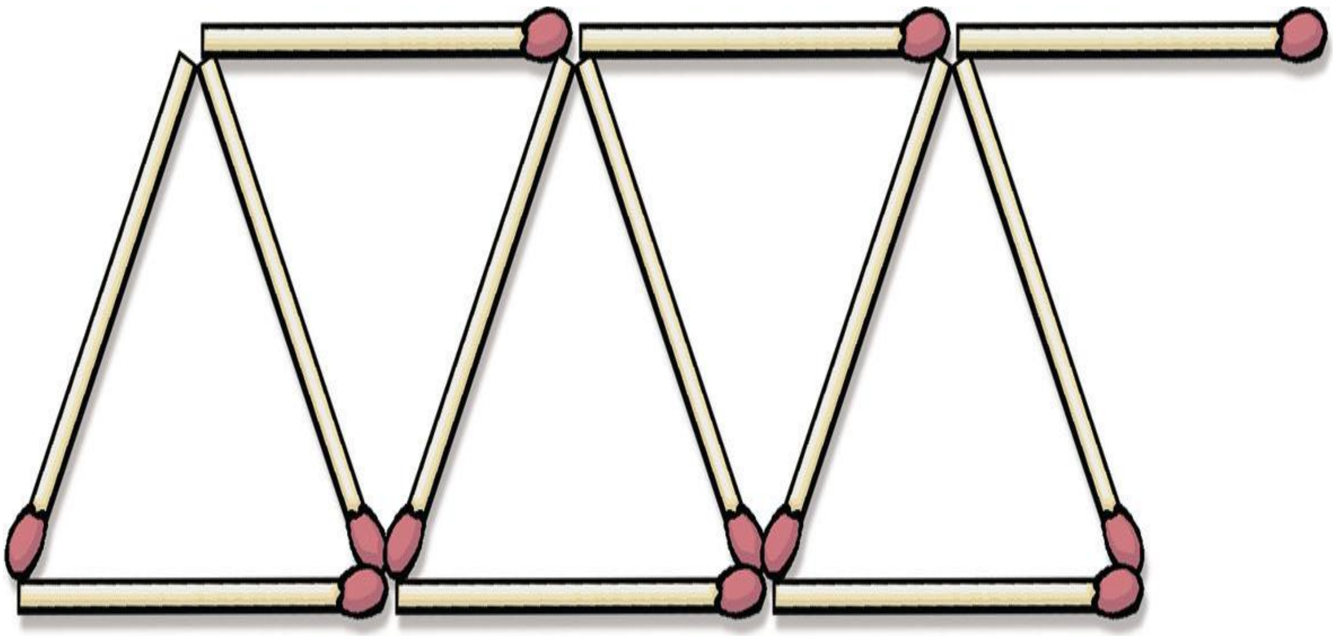
e. O que pode ter acontecido no 5º dia, que a área a ser pintada

permaneceu a mesma que a do dia anterior?

4. Considere a função $f: x \longrightarrow y$ definida por $y = 4x + 1$.

Se $D = \{\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; 0,15\}$, determine o conjunto Imagem da função.

5. Daniel arrumou palitos de fósforos como mostra o desenho a seguir:



Se Daniel continuar formando triângulos seguindo esse modelo, quantos palitos Daniel usará para formar:

a. 4 triângulos?

b. 40 triângulos?

c. t triângulos?

d. Escreva a expressão que representa o total de

palitos (p) em função do número de triângulos (*t*).

6. A bandeirada na corrida de táxi em uma cidade é R$ 4,30 e o valor por quilômetro rodado é R$ 1,40 durante o dia.

a. Escreva uma expressão que indica o valor total de uma corrida (C) em função do número de quilômetros rodados (km).

b. Qual o valor de uma corrida de 9,5km?72

Conclusão

A noção de função é muito importante em Matemática, pois ela é aplicada em vários campos de estudo da própria Matemática e também em outras áreas do conhecimento.

O estudo de funções não se esgota nessa unidade e terá uma continuação em várias outras unidades, aprofundando o estudo e apresentando diferentes funções em diferentes campos da Matemática. É importante que você termine esta unidade

dominando a linguagem e o simbolismo utilizado no tratamento das funções.

Na próxima aula continuaremos trabalhando a noção de função, aprofundando a representação por meio de gráficos, sua interpretação e sua construção.

Resumo

.A noção de função é muito utilizada em diferentes áreas do conhecimento e também no nosso dia a dia.

.É importante reconhecer que quando dois conjuntos apresentam uma correspondência tal que

cada elemento do 1º conjunto está associado a apenas um elemento do 2º conjunto, esta correspondência é uma função.

.Uma função pode ser apresentada utilizando-se tabelas e diagramas. É importante fazer uma articulação entre as diferentes formas de apresentar uma função que foram trabalhadas nesta unidade: a tabela, o diagrama e a expressão matemática que representa a função, além dos gráficos.

. O conjunto cujos elementos são valores da

variável independente é o Domínio da função, enquanto o conjunto cujos elementos são os valores da variável dependente é a Imagem da função. Simplificando, podemos dizer que o Domínio da função é o conjunto de onde partem as setas no diagrama e a Imagem é o conjunto formado pelos elementos onde chegam as setas. Observemos que pode haver casos em que sobrem elementos nesse conjunto.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Caso sobrem elementos no conjunto onde chegam as

flechas, esse conjunto será chamado de contra-domínio da função, e a imagem da função será um subconjunto desse contra-domínio, ou seja, será o conjunto formado apenas pelos elementos que recebem as flechas.

.A notação matemática de função usualmente é

$$f: A \longrightarrow B$$

$$y = f(x)$$

Onde A é o domínio da função, B é o contra-domínio da função e f(x) é a expressão matemática que representa a função.

Podemos ler, usando a notação assim:

f de A em B sendo y = f(x).

.Uma função que destacamos pela sua importância tanto na Matemática como no cotidiano é a proporcionalidade. Toda proporção, seja direta ou inversa, é uma função, no entanto nem toda função apresenta proporcionalidade.

<pág. 73>

Veja Ainda

No site a seguir você irá encontrar atividades interativas em forma de jogo utilizando a noção de fração e desenvolvendo a capacidade de descobrir a “regra” ou lei de formação das variáveis de uma função de maneira curiosa e divertida: http://www.uff.br/cdme/c1d/c1d-html/c1d-br.

Referências

Livros

.Multicurso – Ensino médio –1ª série – Fundação Roberto Marinho – 2ª edição, 2005.

.BORDEAUX , Ana Lucia e outros. Conexão Matemática. Editora do Brasil – 9º ano, 2012.

Respostas das atividades

Situação Problema 1

a. A regra é: multiplica o número por 2 e subtrai 1 do resultado. Podemos escrever uma sentença matemática indicando essa regra da seguinte maneira:

$m = 2s - 1$, sendo M o número que Manuel respondeu e s o número que Solange falou.

b. Sim, Manuel só pode responder dependendo do número que Solange disser.

c. Sim, é função porque para cada número que Solange diz, Manuel só responde um número.

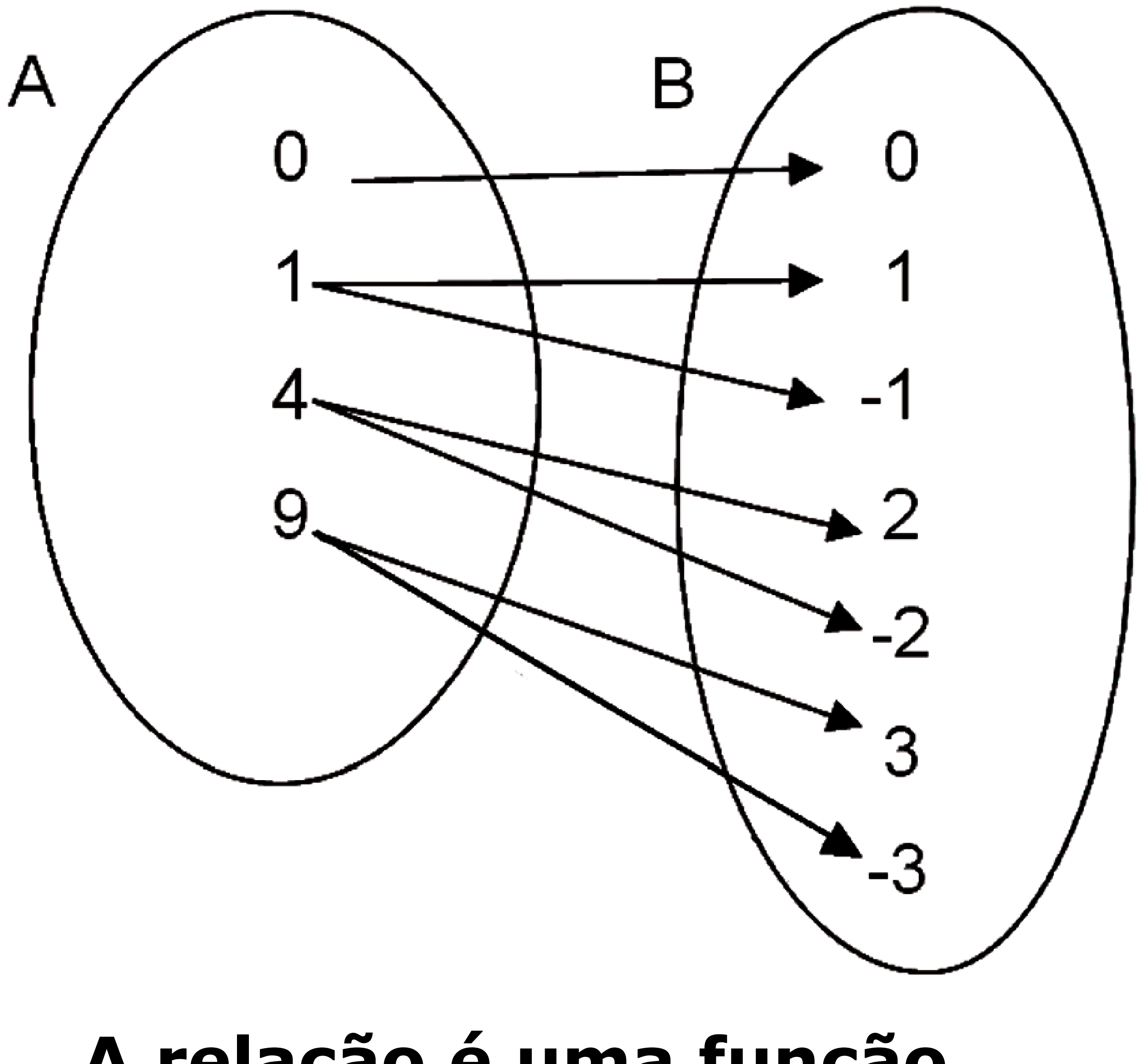
Situação Problema 2

t (horas)	D (km)
1	80
2	160
3	240
4	320
5	400

b. A cada hora corresponde um valor para a distância percorrida em quilômetros.

c. $d = 80t$, sendo d a distância percorrida em km e t o tempo gasto no percurso em horas.

Situação Problema 3



A relação é uma função, pois todos os elementos do conjunto A têm um único correspondente no conjunto B.

Nesse caso, sobram elementos no conjunto B. A imagem dessa função não corresponde ao conjunto B todo. Assim, B é o contra-domínio da função, enquanto Im(f) = {0, 1, 2, 3}.

Situação Problema 4

a.

h	r
1	3
2	5
3	7
4	11

b. Sim, pois a cada valor para o tempo em horas corresponde apenas um valor total a pagar em reais.
c. r = 3 + 2h, sendo h o número de horas que o carro permaneceu no estaciona-mento e r o valor total a pagar.

<pág. 75>

Situação Problema 5

s = 700 + 0,01.v

Desafio 1

Como o vendedor recebeu R$ 35,20 a mais que R$ 700,00 e este valor é 1% do

que ele vendeu, basta multiplicar por 100 e concluímos que ele vendeu R$ 3.520,00 neste mês.

Desafio 2

Exemplo de resposta: A função que relaciona o peso de uma pessoa a cada mês.

1. a.

1º) 45 + 0,38.t

2º) 1,80.t

b. Só o 2º tipo de contrato apresenta proporcionalidade entre as grandezas, pois dobrando o tempo de uso do telefone, por exemplo, dobrará também o valor da conta.

2. a.

L (litros)	D (em km)
1	9
2	18
3	27
4	11

b. Sim, a cada quantidade de litros gastos está associada apenas a uma distância percorrida em km.

c. A relação entre as grandezas apresenta proporcionalidade. Ao dobrar a quantidade de combustível, por exemplo, a distância percorrida também dobra.

d. D=9L

3.

a. Sim, a cada dia de pintura corresponde um único valor para a área que falta pintar.

b. Decresce ou fica constante (no 5º dia).

c. Não. Quando se duplica o número de dias a área a ser pintada não fica reduzida à metade, por exemplo.

d. 7 dias

e. Há várias possibilidades para que a parede não fosse pintada nesse dia. O pintor pode ter faltado, a tinta pode ter

acabado, a pintura pode não ter secado devido ao mau tempo. Esses são alguns exemplos.

<pág. 76>

4. $Im = \{2; \frac{7}{3}; 1; 60\}$

a. 9 palitos.

b. 81 palitos.

c. $p = 3 + 2(t-1) = 2t -1$

d. $p = 3 + 2(t - 1) = 2t + 1$, onde t é o número de triângulos e p o número de palitos de fósforos usados.

6.

a. $C = 4,30 + 1,40k$

b. R$ 17,60

<pág. 77>

O que perguntam por aí?

Atividade 1

Questão 155

O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve

incremento de 4 300 vagas no setor, totalizando 880 605 trabalhadores com carteira assinada.

Disponível em http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado)

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano.

Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro,

o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é:

(A) y = 4 300x

(B) y = 884 905x

(C) y = 872 005 + 4 300x

(D) y = 876 305 + 4 300x

(E) y = 880 605 + 4 300 x

Resposta: Letra C

Comentário: O total de trabalhadores com carteira assinada nesses dois meses (janeiro e fevereiro) foi de 880.605. Subtraindo-se desse total 2 vezes o incremento havido no setor,

ou seja, 2 vezes 4.300 vagas encontramos 872.005 que é a quantidade de trabalhadores antes de Janeiro. Como há um incremento de 4.300 vagas a cada mês, a expressão que relaciona as quantidades nesses meses será a expressão do item C.